ÜBER DARSTELLUNGEN VON LIE ALGEBREN DURCH PHYSIKALISCHE OBSERVABLE

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereiches Physik

der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von

Jörg-Erich Werth

aus Timmendorfer Strand

Marburg/Lahn 1972

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546018_0063

ÜBER DARSTELLUNGEN VON LIE ALGEBREN DURCH PHYSIKALISCHE OBSERVABLE

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereiches Physik

der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von

Jörg-Erich Werth

aus Timmendorfer Strand

Marburg/Lahn 1972

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am	19. 5. 1972
Tag der mündlichen Prüfung am	19. 5. 1972
Berichterstatter:	Prof. Dr. H. D. Doebner
Mitberichterstatter:	Prof. Dr. G. Ludwig

Einleitung

1 Die bekannten "gruppentheoretischen" Methoden zur Beschreibung von Eigenschaften wechselwirkender relativistischer und nichtrelativistischer Teilchen basieren mathematisch auf zwei nicht stets äquivalenten Verfahren, der globalen Methode einerseits und der infinitesimalen Methode andererseits.
Die globale Methode beschreibt das System durch eine unitäre und treue Darstellung einer geeignet gewählten Lie Gruppe. Das infinitesimale Verfahren geht von einer Darstellung einer geeigneten Lie Algebra durch wesentlich schief-adjungierte Operatoren mit einem gemeinsamen dichten invarianten Definitionsbereich aus.
Beide Verfahren sind sowohl in ihrer physikalischen Begründung als auch in den verwendeten mathematischen Methoden unterschiedlich. Sie liefern in bestimmten Spezialfällen äquivalente Resultate. Eine nähere Untersuchung insbesondere der Fälle, in denen verschiedene Resultate auftreten, ist physikalisch wie mathematisch interessant.

2 Unitäre und treue Darstellungen von Lie Gruppen, die nicht zu Darstellungen von Lie Algebren führen, sind in [3] untersucht worden. Darstellungen von Lie Algebren, die sich nicht aus globalen Gruppendarstellungen herleiten lassen - nicht-integrable Darstellungen - sollen in dieser Arbeit untersucht werden. Dabei wird die Konstruktion von Homomorphismen von Lie Algebren $\mathfrak{G}$ in die "unendlich-dimensionale Lie Algebra" $\mathfrak{S}(\mathfrak{H})$ der der auf dem dichten invarianten Bereich $\mathfrak{H}$ in einem Hilbert Raum wesentlich schief-adjungierten Operatoren im Vordergrund stehen. (sog. physikalische Homomorphismen von $\mathfrak{G}$ in eine Teilmenge $\mathfrak{S}(\mathfrak{H})$ der physikalischen Observablen) . Darstellungen dieses Typs werden als echt fast-integrabel bezeichnet.

Folgende physikalische Überlegungen führen zu diesem Typ:

a) Für wechselwirkende Systeme ist es plausibel anzunehmen,daß allen Generatoren der das System eventuell beschreibenden Lie Algebra physikalische Observable entsprechen.Letztere sollten wegen der Darstellungseigenschaften der Lie Algebra und wegen ihrer Eigenschaft,Observable zu sein,einen gemeinsamen dichten invarianten Definitionsbereich haben und auf diesem (als Observable) wesentlich schief-adjungiert sein.

b) Um die Integrabilität der Darstellung mit diesen Eigenschaften als zusätzliche Forderung physikalisch zu begründen,müßte man etwa die den infinitesimalen entsprechenden globalen Transformationen experimentell aufweisen,was für verallgemeinerte Symmetriegruppen im allgemeinen nicht möglich sein wird,d.h. echt fast-integrable Darstellungen sind physikalisch gerechtfertigt.
Hinzu kommt,daß sie zur nichttrivialen Kopplung innerer und äußerer Symmetrien geeignet sind,während für integrable Darstellungen nach einem Satz von Coleman und Mandula [6] nur triviale Kopplungen existieren.
Schließlich ergibt sich im Zusammenhang mit der Ableitung diskreter Massenspektren von dynamischen Lie Algebren,daß für wechselwirkende Systeme die Integrabilitätsannahme nicht sinnvoll ist [5] .

3 Echt fast-integrable Darstellungen gehören der Klasse der "nicht-integrablen" Darstellungen (s.S.55) an,d.h. sie können nicht nach dem Theorem von Stone aus einer unitären (globalen) Darstellung der zugehörigen Gruppe hergeleitet werden.Solche "nicht-integrablen" Darstellungen lassen sich mathematisch unter Verwendung von Resultaten von E.Nelson [1] diskutieren,die einen Zusammenhang zwischen der Integrabilität einer Liealgebradarstellung und der wesentlichen Selbst-Adjungiertheit des sog. Nelson Operators der Darstellung herstellen.

Damit gewinnen wesentlich selbst-adjungierte Operatoren im Zusammenhang mit Liealgebradarstellungen sowohl aus physikalischen Gründen (Observable als wesentlich schief-adjungierte Operatoren) als auch aus formalen Gründen (Integrabilitätskriterien) an Interesse.

4 Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Teile.
In den Kapiteln I - IV werden in Hinblick auf die zu konstruierenden Homomorphismen von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{S}(\mathfrak{H})$ Eigenschaften wesentlich selbst-adjungierter Operatoren behandelt. Speziell wird zunächst über die Charakterisierung selbst-adjungierter Operatoren durch analytische Vektoren referiert (Kapitel I) . Notwendige und hinreichende topologische Kriterien für die wesentliche Selbst-Adjungiertheit symmetrischer Operatoren werden bewiesen (Kapitel II) und im sog. "Triplet-Formalismus" (Kapitel III) dargestellt.Darüberhinaus wird der Zusammenhang zwischen analytischen Vektoren und selbst-adjungierten Operatoren durch Konstruktion von Triplets mit speziellen Invarianz-eigenschaften verdeutlicht.
Für die Konstruktion physikalischer Liealgebradarstellungen erweisen sich insbesondere Operatoren als wesentlich, die aus Vektorfeldern aufgebaut sind (Korrespondenz-prinzip) ; solche Operatoren werden deshalb näher unter-sucht (Kapitel IV) .
In den Kapiteln V und VI werden Homomorphismen von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{S}(\mathfrak{H})$ konstruiert,wobei alle Generatoren einen gemein-samen dichten invarianten Bereich besitzen.So ergeben sich sowohl integrable als auch nicht-integrable physikalische Liealgebradarstellungen,die in verschiedene Klassen (integrable,fast-integrable,echt fast-integrable und partiell integrable Darstellungen,s.Def.V.3 - V.6) eingeteilt werden.

5 Wir fassen die Gliederung der vorliegenden Arbeit noch einmal zusammen:

Im I. Kapitel betrachten wir grunglegende Eigenschaften wesentlich selbst-adjungierter Operatoren.
Diese Ergebnisse führen dann in den Kapiteln II und III zu topologischen Charakterisierungen wesentlich selbst-adjungierter Operatoren.
In Kapitel IV wird die wesentliche Schief-Adjungiertheit schiefsymmetrischer Vektorfeldoperatoren untersucht.
Die Diskussion integrabler und nicht-integrabler Darstellungen von Lie Algebren erfolgt in Kapitel V.
Der Zusammenhang zwischen der Integrabilität einer Darstellung und der wesentlichen Selbst-Adjungiertheit des Nelson Operators der Darstellung sowie unsere Kriterien für die wesentliche Selbst-Adjungiertheit symmetrischer Operatoren führen in Abschnitt V.2 zur Konstruktion einer fast-integrablen Darstellung.
In Kapitel VI geben wir unter Verwendung der Kriterien aus Kapitel IV Beispiele verschiedener Typen echt fast-integrabler Darstellungen an und zeigen,daß jede Lie Algebra echt fast-integrable Darstellungen besitzt.

Inhaltsverzeichnis

I	Analytische Vektoren und wesentlich selbst-adjungierte Operatoren	1
I.1	Analytische Vektoren	2
I.2	Eigenschaften wesentlich selbst-adjungierter Operatoren	4
I.3	Anwendungen und Beispiele	9
II	Topologische Kriterien für wesentlich selbst-adjungierte Operatoren	11
II.1	Topologische Charakterisierungen wesentlich selbst-adjungierter Operatoren	12
II.2	Anwendungen und Beispiele	16
III	Triplets und wesentlich selbst-adjungierte Operatoren	21
III.1	Triplets	22
III.2	Operatoren in Triplets	24
III.3	Kriterien für wesentlich selbst-adjungierte Operatoren	29
	Anhang zu Kapitel III	38
IV	Vektorfeldmethoden	40
IV.1	Mannigfaltigkeiten und Vektorfelder	41
IV.2	Das verallgemeinerte Lemma von Nelson	43
IV.3	Anwendungen	46
V	Integrable und nicht-integrable Darstellungen von Lie Algebren	52
V.1	Das Theorem von Stone	53
V.2	Definition und Eigenschaften integrabler bzw. nicht-integrabler Darstellungen	55
V.3	Physikalische Motivation bestimmter nicht-integrabler Darstellungsklassen	60

VI Konstruktion nicht-integrabler Darstellungen 62

VI.1 Eine echt fast-integrable Darstellung der zwei-dimensionalen abelschen Lie Algebra 63

VI.2 Echt fast-integrable Darstellungen der Heisenberg Algebra 65

VI.3 Echt fast-integrable Darstellungen für jede Lie Algebra 67

VI.4 Konstruktion partiell integrabler Liealgebradarstellungen 72

Literaturverzeichnis 74

I ANALYTISCHE VEKTOREN UND WESENTLICH SELBST-ADJUNGIERTE OPERATOREN

In diesem Kapitel sollen die wichtigsten, in II und III benötigten Eigenschaften wesentlich selbst-adjungierter Operatoren zusammengefaßt werden.
Ein wichtiges Hilfsmittel ist in diesem Zusammenhang der Begriff des analytischen Vektors. Wir definieren in Abschnitt I.1 analytische Vektoren eines linearen Operators (Definition I.1) und geben einige Eigenschaften der Menge aller analytischen Vektoren eines Operators A an (Lemma I.2 - I.4).
In I.2 werden (wesentlich) selbst-adjungierte Operatoren betrachtet sowie Kriterien für die wesentliche Selbst-Adjungiertheit symmetrischer Operatoren erörtert (Lemma I.5 - I.12).
Abschließend diskutieren wir in Abschnitt I.3 die Ergebnisse von I.2 an einigen Beispielen.

Vereinbarung

Wir verwenden an Stelle von "(wesentlich) selbst-adjungiert" bzw. "(wesentlich) schief-adjungiert" auch die Abkürzungen "(w.) s.a." bzw. "(w.) sch.a.".

I.1 Analytische Vektoren

Einige Probleme im Zusammenhang mit w.s.a. Operatoren können durch eine Betrachtung ihrer analytischen Vektoren gelöst werden.

Wir geben zunächst eine

Definition I.1

Sei A ein linearer Operator mit Bereich $\mathfrak{D}_A \subset H$. *)
Dann heißt $\varphi \in \mathfrak{D}_A$ analytischer Vektor von A, falls ein $s > 0$ existiert mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \| A^\nu \varphi \| s^\nu < \infty$$

Die Menge aller analytischen Vektoren des Operators A wird mit $\mathfrak{D}_A^{an}$ bezeichnet. Es gilt offensichtlich $\mathfrak{D}_A^{an} \subset \mathfrak{D}_A$.

Wir kommen nun zu

Definition I.2

Sei $\xi = \{A_1, \ldots A_n\}$ eine Menge linearer Operatoren mit Definitionsbereichen $\mathfrak{D}_{A_i}$. Dann heißt $\varphi \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{D}_{A_i}$ analytischer Vektor von ξ, falls ein $s > 0$ existiert mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \Big(\sum_{1 \le i_1, i_2 \ldots i_\nu \le n} \| A_{i_1} \ldots A_{i_\nu} \varphi \| \Big) s^\nu < \infty$$

Die Menge aller analytischen Vektoren von ξ bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}_\xi^{an}$.

In diesem Zusammenhang ergibt sich sofort

Lemma I.1

Sei $\xi = \{A_1, \ldots, A_n\}$
Dann gilt für eine beliebige Teilmenge $\eta \subset \xi$

$$\mathfrak{D}_\xi^{an} \subset \mathfrak{D}_\eta^{an}$$

Beweis:

Ergibt sich sofort aus Definition I.1 und I.2 .

---

*) H sei ein Hilbert Raum; wir betrachten nur Operatoren in Hilbert Räumen.

Wir geben jetzt zwei weitere Eigenschaften analytischer Vektoren an :

Lemma I.2

$\mathcal{D}_A^{an}$ ist ein linearer Raum.

Beweis:

Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_A^{an}$; für $\alpha\varphi + \beta\psi \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ erhalten wir dann

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \| A^\nu (\alpha\varphi + \beta\psi) \| s^\nu$$

$$\leq |\alpha| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \| A^\nu \varphi \| + |\beta| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \| A^\nu \psi \| s^\nu$$

$< \infty$ für ein geeignetes $s > 0$, da $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_A^{an}$.

Lemma I.3

$$A\, \mathcal{D}_A^{an} \subset \mathcal{D}_A^{an}$$

Beweis:

Sei $\psi = A\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}_A^{an}$.

Für ψ erhalten wir

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \| A^\nu \psi \| s^\nu = \frac{1}{s} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu+1} \nu!} \| A^{\nu+1} \varphi \| (2s)^{\nu+1}$$

$$\leq \frac{1}{s} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)!} \| A^{\nu+1} \varphi \| (2s)^{\nu+1} \quad \text{da} \quad 2^{\nu+1} \geq \nu+1$$

Daraus ergibt sich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \| A^\nu \psi \| s^\nu \leq \frac{1}{s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \| A^\nu \varphi \| (2s)^\nu < \infty$$

für ein geeignetes $s > 0$, da $\varphi \in \mathcal{D}_A^{an}$.

I.2 Eigenschaften wesentlich selbst-adjungierter Operatoren

In diesem Abschnitt geben wir äquivalente Kriterien für die wesentliche Selbst-Adjungiertheit symmetrischer Operatoren an, vor allem in Hinblick auf topologische Charakterisierungen in den Kapiteln II und III.

Vorbereitend benötigen wir zunächst

Definition I.3

Ein Operator A läßt sich abschließen, wenn aus

$x_n \in \mathfrak{D}_A$, $x_n' \in \mathfrak{D}_A$

$x_n \to x$, $x_n' \to x'$, $Ax_n \to y$, $Ax_n' \to y'$

folgt, daß $y = y'$ ist.

In diesem Fall besteht der Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{\widetilde{A}}$ der Abschließung $\widetilde{A}$ genau aus den Vektoren x , für die eine Folge $x_n \in \mathfrak{D}_A$ existiert, die folgenden Bedingungen genügt:

i) $x_n \to x$

ii) Ax_n konvergiert *)

Hierbei ist $\widetilde{A}x = \lim Ax_n$

Definition I.4

Ein symmetrischer (schiefsymmetrischer) Operator A heißt w.s.a. (w.sch.a.), wenn seine Abschließung **) s.a. (sch.a.) ist.

Wir bemerken noch folgendes:
Ein Operator A auf $\mathfrak{D}_A$ ist genau dann symmetrisch, w.s.a. oder s.a., wenn iA auf $\mathfrak{D}_A$ schiefsymmetrisch, w.sch.a. oder sch.a. ist.

---

*) $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_{\widetilde{A}}$ (für $x \in \mathfrak{D}_A$ betrachte man die Folge $\{x_n = x\}$)

**) Ein (schief) symmetrischer Operator ist abschließbar.

Es gelten folgende Resultate:

Lemma I.4 [7]

Sei A auf $\mathfrak{D}_A \subset H$ ein dicht definierter Operator.
Dann gilt:

i) A* ist ein abgeschlossener Operator. *)

ii) A sei abschließbar $\Rightarrow$ $\widetilde{A} = A^{**}$

iii) A ist abgeschlossen $\Rightarrow$ $A = A^{**}$

Lemma I.5 [2], [8]

Sei A auf $\mathfrak{D}_A \subset H$ ein dicht definierter symmetrischer Operator.
Dann gilt:
A ist s.a. $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{R}_{A \pm i1} = H$ **)

Lemma I.6 [2], [8]

Sei A auf $\mathfrak{D}_A \subset H$ ein dicht definierter symmetrischer Operator.
Dann gilt:
A ist w.s.a. $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{R}_{A \pm i1}$ ist dicht in H .

Ein wichtiges Kriterium für die wesentliche Schiefadjungiertheit eines schiefsymmetrischen Operators ist das folgende

Lemma I.7

Sei A auf $\mathfrak{D}_A \subset H$ ein dicht definierter schiefsymmetrischer Operator mit folgender Eigenschaft:
Für $u \in \mathfrak{D}_{A^*}$ impliziere sowohl $A^*u = u$ als auch $A^*u = -u$ $u = 0$.
Dann ist A auf $\mathfrak{D}_A$ w.sch.a.

Beweis:

Wir nehmen an, A sei nicht w.sch.a. Dann ist nach Lemma I.6 $(A + I)\mathfrak{D}_A$ oder $(A - I)\mathfrak{D}_A$ nicht dicht in H.

Fall a.) Sei $(A + I)\mathfrak{D}_A$ nicht dicht in H. Dann existiert ein $u \in H$, $u \neq 0$ mit $((A + I)a, u) = 0$ für alle $a \in \mathfrak{D}_A$.

) A ist der adjungierte Operator von A .

**) $\mathfrak{R}_A$ ist der Wertebereich des Operators A.

Mit $u^* = 0 \in H$ erhalten wir dann
$0 = ((A+I)a,u) = (a,u^*)$ für alle $a \in \mathfrak{D}_A$.
Somit ist $u \in \mathfrak{D}_{(A+1)^*}$ mit $(A+I)^*u = 0$.
Wir erhalten ([ ] S.113)

$A^*u + u = 0$, d.h.

$A^*u = -u$ für $u \neq 0$.

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. es muß gelten $(A + I)\,\mathfrak{D}_A$ liegt dicht in H

Fall b.) Wenn wir $(A - I)\,\mathfrak{D}_A$ als nicht dicht in H annehmen, kommen wir auf analoge Weise zu einem Widerspruch.

Wir erhalten somit, daß die Aussage ii) von Lemma I.6 für iA erfüllt ist, d.h. A ist w.sch.a.

E. Nelson zeigte ([1]) , daß für einen s.a. Operator A die Menge $\mathfrak{D}_A^{an}$ der analytischen Vektoren dicht in H liegt. Wir formulieren das Ergebnis als

Lemma I.8

Sei A auf $\mathfrak{D}_A$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator und $\mathfrak{D}_A$ dicht in H.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) A ist s.a.

ii) A besitzt eine dichte Menge analytischer Vektoren

Ein weiteres nützliches Kriterium ist gegeben durch ([1])

Lemma I.9

Sei A auf $\mathfrak{D}_A$ ein dicht definierter symmetrischer Operat
Dann ist A auf $\mathfrak{D}_A$ wesentlich selbst-adjungiert, wenn A eine dichte Menge analytischer Vektoren besitzt.

Anmerkung 1

Für s.a. Operatoren läßt sich mit Hilfe der analytische Vektoren eine äquivalente Charakterisierung angeben (Lemma I.8), für w.s.a. Operatoren liefert dieses Verfahren dagegen nur ein hinreichendes Kriterium.

Anmerkung 2

Ein s.a. Operator A auf $\mathcal{D}_A$ ist w.s.a. auf dem invarianten Bereich $\mathcal{D}_A^{\infty}$.

Für weitere Betrachtungen in den Kapiteln II und III sind die drei folgenden Lemmata von Bedeutung:

Lemma I.10

Sei $A : \mathcal{D}_A \to H$ ein symmetrischer Operator.
Dann ist die Abschließung

$$\tilde{A} : \mathcal{D}_{\tilde{A}} \longrightarrow H$$

ebenfalls ein symmetrischer Operator.

Beweis:

Seien $f, g \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$.
Dann existieren Folgen

$$\mathcal{D}_A \ni f_n \longrightarrow f \quad , A f_n \longrightarrow \tilde{A} f$$

$$\mathcal{D}_A \ni g_n \longrightarrow g \quad , A g_n \longrightarrow \tilde{A} g$$

Aufgrund der Stetigkeit des inneren Produkts folgt

$$(\tilde{A} f, g) = \lim (A f_n, g_m) = \lim (f_n, A g_m) = (f, \tilde{A} g).$$

Lemma I.11

Für einen symmetrischen Operator A *) gilt:
A w.s.a. $\Leftrightarrow$ A* symmetrisch

Beweis:

"$\Rightarrow$" :

A sei w.s.a. $\Rightarrow$ $\tilde{A} = A^{**}$ ist s.a. (s. Lemma I.4-ii))
$\Rightarrow$ $A^{**} = A^{***}$ $\Rightarrow$ $A^{**} = A^{*}$ (s. Lemma I.4 i),iii))
d.h. A* ist symmetrisch.

"$\Leftarrow$" :

A* sei symmetrisch, d.h. $A^* \subset A^{**}$.
Andererseits gilt aufgrund der Symmetrie von A
$A \subset A^*$, folglich ist $A^{**} \subset A^*$ ([7] S.113).
Wir haben also $A^* = A^{**}$; das impliziert $A^{**} = A^{***}$
d.h. $\tilde{A} = (\tilde{A})^*$ .Dies ist aber die Selbstadjungiertheit von $\tilde{A}$, somit ist A w.s.a.

---

*) Wir schreiben im folgenden der Kürze halber anstelle von " A auf $\mathcal{D}_A$ " oder "$(A, \mathcal{D}_A)$" oft nur A .

Lemma I.12

$A : \mathfrak{D}_A \to H$ sei ein symmetrischer Operator.

Dann gilt:

A w.s.a. $\iff (A^*, \mathfrak{D}_{A^*}) = (\widetilde{A}, \mathfrak{D}_{\widetilde{A}})$

Beweis:

"$\Rightarrow$":

A w.s.a. $\Rightarrow \widetilde{A} = A^{**}$ ist s.a. $\Rightarrow A^{**} = A^{***}$

$\Rightarrow A^{**} = A^*$ da A^* abgeschlossen und symmetrisch

$\Rightarrow A^* = \widetilde{A}$.

"$\Leftarrow$":

$A^* = \widetilde{A} = A^{**} \Rightarrow A^{**} = A^{***} \Rightarrow \widetilde{A} = \widetilde{A}^*$

$\Rightarrow \widetilde{A}$ ist s.a. $\Rightarrow A$ ist w.s.a.

I.3 Anwendungen und Beispiele

Mit Hilfe der Ergebnisse der beiden vorhergehenden Abschnitte diskutieren wir einige Beispiele.

Es ergibt sich

Lemma I.13

$\mathbb{X}^n$ auf $S(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$ ist w.s.a. für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Für $n = 0$ ist die Aussage trivial.

Für $n \neq 0$ zeigen wir, daß die dichte Menge $C_0^\infty(\mathbb{R})$ in $\mathcal{D}_{\mathbb{X}^n}$ enthalten ist:

Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt für ein endliches $a > 0$

$$\| \mathbb{X}^{n\nu} f \| = \int_{-a}^{+a} x^{2n\nu} |f(x)|^2 \, dx$$

$$= 2a \, \xi^{2n\nu} |f(\xi)|^2 \text{ für ein } \xi \in [-a, +a] \text{ (Mittelwertsatz)}$$

$$\leq 2a \, a^{2n\nu} |f(\xi_0)|^2 \text{ mit } f(\xi_0) = \max_{\xi \in [-a,+a]} f(\xi)$$

$$= 2a \, |f(\xi_0)|^2 (a^{2n})^\nu$$

$$\Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \| \mathbb{X}^\nu f \| s^\nu \leq 2a \, |f(\xi_0)|^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (a^{2n} s)^\nu < \infty$$

Also ist nach Lemma I.9 $\mathbb{X}^n$ auf $S(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R})$ w.s.a.

Darüberhinaus erhält man als Folgerung:

Lemma I.14

$(i \, d/dx)^n$ auf $S(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$ ist w.s.a. für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Für die Fouriertransformation

$$\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \longrightarrow L_2(\mathbb{R})$$

gilt:

i) $\mathcal{F}$ ist unitär

ii) $\mathcal{F} \, S(\mathbb{R}) = S(\mathbb{R})$

iii) $\mathcal{F} \, C_0^\infty(\mathbb{R})$ ist dicht in $L_2(\mathbb{R})$.

Die wesentliche Selbst-Adjungiertheit von $(i \frac{d}{dx})^n$ auf $S(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$ ergibt sich nun folgendermaßen:

(a) $(i\frac{d}{dx})^n = (\mathcal{F} X \mathcal{F}^{-1})^n = \mathcal{F} X^n \mathcal{F}^{-1}$

(b) $\mathcal{F} C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^{an}_{\mathcal{F} X^n \mathcal{F}^{-1}}$:

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \Longrightarrow$ (vgl.Bew.von Lemma I.13)
φ ist analytischer Vektor von X^n

d.h. $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \| X^{n\nu} \varphi \| s^\nu < \infty$ für ein $s>0$

$\Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \| (\mathcal{F} X^n \mathcal{F}^{-1})^\nu \mathcal{F} \varphi \| s^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \| \mathcal{F} X^{n\nu} \varphi \| s^\nu$

$\overset{i)}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \| X^{n\nu} \varphi \| s^\nu < \infty$

Somit ist $\mathcal{F}\varphi$ für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ analytischer Vektor von $\mathcal{F} X^n \mathcal{F}^{-1}$.
Da $\mathcal{F} C_0^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $L_2(\mathbb{R})$ liegt, hat $(i\frac{d}{dx})^n$ auf $S(\mathbb{R})$ einen dichten Bereich analytischer Vektoren. Aus Lemma I.9 folgt dann die Behauptung.

Wir wollen jetzt noch unter Verwendung von Lemma I.6 ein Beispiel eines symmetrischen, nicht w.s.a. Operators angeben:

Lemma I.15

$(i^d/_{dx})$ auf $K(a) = \{ \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \varphi(x) = 0 \text{ für } |x| \geq a \} \subset L_2(-a,+a)$ ist nicht w.s.a.

Beweis:

Wir weisen die Ungültigkeit der Beziehung

$(^d/_{dx} + 1)\, K(a) \overset{\text{dicht}}{\subset} L_2(-a,+a)$

nach:

$0 \neq e^x \in L_2(-a,+a)$ und es gilt für alle $\varphi \in K(a)$:

$$\int_{-a}^{+a} \varphi'(x)\, e^x\, dx + \int_{-a}^{+a} \varphi(x)\, e^x\, dx$$

$$= \varphi(x) e^x \Big|_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a} \varphi(x)\, e^x\, dx + \int_{-a}^{+a} \varphi(x)\, e^x\, dx = 0$$

d.h. $0 \neq e^x \perp (^d/_{dx} + 1)\, K(a)$

Nach Lemma I.6 ist die Behauptung bewiesen.

II TOPOLOGISCHE KRITERIEN FÜR WESENTLICH SELBST-ADJUNGIERTE OPERATOREN

Wir verwenden jetzt ein Ergebnis aus Kapitel I (Lemma I.11) , um notwendige und hinreichende topologische Kriterien für die wesentliche Selbst-Adjungiertheit symmetrischer Operatoren herzuleiten (Lemmata II.5,II.6 und II.7) .
Anschließend betrachten wir symmetrische Operatoren, die auf der linearen Hülle LH $\{\varphi_\nu\}$ eines vollständigen orthonormalen Systems ("v.o.n.S.") $\{\varphi_\nu\}$ im Hilbert Raum H definiert sind.Für eine spezielle Klasse solcher Operatoren ("quasidiagonale" Operatoren,s.Definition II.4) läßt sich mit Hilfe unserer Kriterien bereits die wesentliche Selbst-Adjungiertheit nachweisen (Lemma II.10).

Die Ergebnisse dieses Kapitels verwenden wir in Kapitel V zur Konstruktion einer integrablen Liealgebradarstellung durch unbeschränkte w.sch.a. Operatoren (s. Beispiel zu Lemma V.4) .

II.1 Topologische Charakterisierungen wesentlich selbst-adjungierter Operatoren

Nach grundlegenden Definitionen und Sätzen kommen wir zu äquivalenten topologischen Charakterisierungen w.s.a. Operatoren (Lemma II.5) .

Definition II.1

Zwei lineare Räume L_1 und L_2 über dem Körper K bilden ein Dualsystem $\langle L_2, L_1 \rangle$,wenn jedem Paar $(u,x) \in L_2 \times L_1$ ein Element $\langle u,x \rangle$ aus K zugeordnet ist,so daß folgendes gilt:

i) $\langle u,x \rangle$ ist eine Bilinearform.

ii) Ist für ein $x \in L_1$ $\langle u,x \rangle = 0$ für alle $u \in L_2$, so ist $x = 0$.

iii) Ist für ein $u \in L_2$ $\langle u,x \rangle = 0$ für alle $x \in L_1$, so ist $u = 0$.

Lemma II.1

Sei ϕ ein topologischer Vektorraum und sei ϕ' sein Dualraum *) .
Dann ist $\langle \phi, \phi' \rangle$ auf natürliche Weise ein Dualsystem.

Definition II.2

Sei $\langle L_2, L_1 \rangle$ ein Dualsystem.
Dann ist auf L_1 die schwache Topologie bzgl. $\langle L_2, L_1 \rangle$ durch die Nullumgebungsbasis

$$U_{F,\varepsilon} = \{ u \in L_1 : |\langle x,u \rangle| < \varepsilon \text{ für alle } x \in F,\ F \subset L_2 \text{ endl.},\ \varepsilon > 0 \}$$

gegeben.

Ist L_2 ein lokalkonvexer Raum,so können wir auf L_1 die sog. starke Topologie bzgl. $\langle L_2, L_1 \rangle$ durch die Nullumgebungsbasis

$$U_{B,\varepsilon} = \{ u \in L_1 : |\langle x,u \rangle| < \varepsilon \text{ für alle } x \in B,\ B \text{ beschr. in } L_2,\ \varepsilon > 0 \}$$

einführen.

Die schwache und die starke Topologie sind lokalkonvexe Topologien .

---

*) Der Dualraum ϕ' von ϕ ist der Raum aller stetigen Linearformen auf ϕ .

Lemma II.2

Sei $L \subset H$ ein dichter linearer Unterraum von H.
Dann ist $\langle L, H' \rangle$ ein Dualsystem.

Beweis:

Es existiert ein konjugiert linearer Isomorphismus $\tilde{I}$ von H' auf H, definiert durch

$$(g, \tilde{I}h')_H = h'(g) \quad , \; g \in H, h' \in H' \; .$$

Folglich erhalten wir

i) $\langle g, h' \rangle = h'(g) = (g, \tilde{I}h')_H = 0$ für alle $g \in L$
$\Rightarrow \tilde{I}h' = 0$, da L dicht in H
$\Rightarrow h' = 0$, da $\tilde{I}$ Isomorphismus.

ii) $\langle g, h' \rangle = h'(g) = (g, \tilde{I}h')_H = 0$ für alle $h' \in H'$
$\Rightarrow (g,h) = 0$ für alle $h \in H$, da $\tilde{I}$ H' auf H abbildet,
$\Rightarrow g = 0$.

Definition II.3

Sei $A: \mathfrak{D}_A \to H$ ein dicht definierter symmetrischer (linearer) Operator und sei $A^*: \mathfrak{D}_{A^*} \to H$ sein adjungierter Operator.
Dann bezeichnen wir die schwache Topologie auf H' hinsichtlich des Dualsystems $\langle \mathfrak{D}_{A^*}, H' \rangle$ mit τ_{A^*} . *)
Aufgrund des Isomorphismus' $\tilde{I}$ können wir τ_{A^*} auch als eine Topologie auf H ansehen.

Lemma II.3

(H, τ_{A^*}) **) ist ein linearer topologischer Raum, dessen Nullumgebungsbasis von allen Mengen der Form

$$\mathcal{U}_{F,\varepsilon} = \{ h \in H : |(h,f)| < \varepsilon \text{ für alle } f \in F, F \underset{\text{endl.}}{\subset} \mathfrak{D}_{A^*}, \varepsilon > 0 \}$$

gebildet wird.
Es gilt also $H \ni h_n \xrightarrow{\tau_{A^*}} 0 \iff (h_n, g) \to 0$ für alle $g \in \mathfrak{D}_{A^*}$.

Lemma II.4

H_σ ***) ist feiner als (H, τ_{A^*}).

Beweis:

Jede in H_σ konvergente Folge ist auch in (H, τ_{A^*}) konvergent.

---

*) $\mathfrak{D}_{A^*}$ ist dicht in H, da $\mathfrak{D}_{A^*} \supset \mathfrak{D}_A$ (A ist symmetrisch)
**) (H, τ_{A^*}) ist die Menge H, versehen mit der Topologie τ_{A^*} .
***) H_σ ist H, versehen mit d. schw. Top. bzgl. $\langle H, H' \rangle$.

Wir kommen nun zu dem oben angekündigten Kriterium, das in eineindeutiger Weise w.s.a. Operatoren durch topologische Bedingungen kennzeichnet:

Lemma II.5

A auf $\mathfrak{D}_A \subset H$ sei ein dicht definierter symmetrischer linearer Operator.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) A auf $\mathfrak{D}_A$ ist w.s.a.

ii) A^* auf $\mathfrak{D}_{A^*}$ ist symmetrisch.

iii) $A^* : (\mathfrak{D}_{A^*}, \text{Top } H_\sigma) \longrightarrow (H, \tau_{A^*})$ ist stetig *).

iv) Zu jedem $g \in \mathfrak{D}_{A^*}$ gibt es eine Folge

$$\mathfrak{D}_A \ni g_\kappa \xrightarrow[H_\sigma]{} g \in \mathfrak{D}_{A^*} \quad \text{mit} \quad A^* g_\kappa \xrightarrow{(H, \tau_{A^*})} A^* g .$$

Beweis:

Die Äquivalenz von i) und ii) wurde bereits gezeigt (Lemma I.11).

ii) $\Rightarrow$ iii):
A^* auf $\mathfrak{D}_{A^*}$ sei symmetrisch; f, g seien aus $\mathfrak{D}_{A^*}$.
Es gelte $\mathfrak{D}_{A^*} \ni g_\kappa \xrightarrow{H_\sigma} g \in \mathfrak{D}_{A^*}$
Wir erhalten dann

$$(f, A^* g) = (A^* f, g) = \lim (A^* f, g_\kappa)$$
$$= \lim (f, A^* g_\kappa)$$

d.h. $A^* g_\kappa \xrightarrow{(H, \tau_{A^*})} A^* g$

iii) $\Rightarrow$ iv): trivial

iv) $\Rightarrow$ ii):
Seien $f, g \in \mathfrak{D}_{A^*}$ und sei g_κ eine Folge in $\mathfrak{D}_A$, für die gilt (Vor. iv))

$$\mathfrak{D}_A \ni g_\kappa \xrightarrow{H_\sigma} g \in \mathfrak{D}_{A^*} \quad , \quad A^* g_\kappa \xrightarrow{(H, \tau_{A^*})} A^* g .$$

Dann erhalten wir
$(A^* f, g) = \lim (A^* f, g_\kappa) = \lim (f, A^* g_\kappa)$ (A symm.)
$= (f, A^* g)$ (nach Voraussetzung)

---

*) $(\mathfrak{D}_{A^*}, \text{Top } H_\sigma)$ ist die Menge $\mathfrak{D}_{A^*}$, versehen mit der Spurtopologie von H_σ.

Aus Lemma II.5 ergeben sich sofort zwei hinreichende topologische Kriterien für die wesentliche Selbstadjungiertheit symmetrischer Operatoren:

Lemma II.6

A auf $\mathfrak{D}_A \subset H$ sei ein dicht definierter symmetrischer Operator.

Dann gilt:

$A^* : (\mathfrak{D}_{A^*}, \text{Top } H_\sigma) \longrightarrow H_\sigma$ ist stetig

$\Longrightarrow$ A auf $\mathfrak{D}_A$ ist w.s.a.

Beweis:

Folgt sofort aus den Lemmata II.4 und II.5.

Lemma II.7

A auf $\mathfrak{D}_A \subset H$ sei ein dicht definierter symmetrischer Operator.

Zu jedem $g \in \mathfrak{D}_{A^*}$ gebe es eine Folge

$$\mathfrak{D}_A \ni g_\kappa \xrightarrow{H_\sigma} g \in \mathfrak{D}_{A^*} \quad \text{mit} \quad A^* g_\kappa \xrightarrow{H_\sigma} A^* g .$$

Dann ist A auf $\mathfrak{D}_A$ w.s.a.

Beweis:

Folgt aus Lemma II.4 und Lemma II.5.

Anmerkung:

In den Lemmata II.5 , II.6 und II.7 können wir H_β an Stelle von H_σ schreiben . *)

---

*) H_β ist die Menge H , versehen mit der starken Topologie bzgl. des Dualsystems $\langle H , H' \rangle$.

II.2 Anwendungen und Beispiele

Wir weisen in diesem Abschnitt die wesentliche Selbst-Adjungiertheit quasidiagonaler symmetrischer Operatoren nach (Lemma II.10) und zeigen, daß dieses Verfahren auch auf unbeschränkte Operatoren dieses Typs anwendbar ist .

Zunächst kommen wir zu

Lemma II.8

Sei $\{\varphi_\nu\}$ v.o.n.S. in H und sei A ein Operator auf $\mathfrak{D}_A := \mathrm{LH}\{\varphi_\nu\}$ definiert durch $A\varphi_\nu = \sum_\mu a_\nu^\mu \varphi_\mu$

Dann gilt:

i) A ist symmetrisch $\iff a_\nu^\mu = \overline{a_\mu^\nu}$

ii) A $\mathrm{LH}\{\varphi_\nu\} \subset \mathrm{LH}\{\varphi_\nu\} \iff$
jede Zeile und jede Spalte von a_ν^μ hat nur endlich viele von Null verschiedene Komponenten.

iii) Sei $h \in \mathfrak{D}_{A^*}$, $h^* = A^*h$.
Dann gilt $(h^*, \varphi_\nu) = \sum_\mu \overline{a_\nu^\mu}(h, \varphi_\mu)$

Beweis:

i) und ii) sind sofort ersichtlich, für iii) verläuft der Beweis folgendermaßen:

Es gilt

$(h^*, \varphi) = (h, A\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathfrak{D}_A = \mathrm{LH}\{\varphi_\nu\}$

d.h. $(\sum_\nu (h^*, \varphi_\nu)\varphi_\nu, \Sigma \alpha_\nu \varphi_\nu)$
$= (\sum_\nu (h, \varphi_\nu)\varphi_\nu, \sum_\nu \sum_\mu \alpha_\nu a_\nu^\mu \varphi_\mu)$

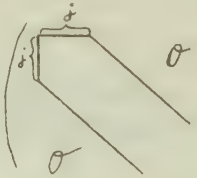
$\Rightarrow \sum_\nu \overline{\alpha_\nu}(h^*, \varphi_\nu) = \sum_\mu (h, \varphi_\mu) \overline{\alpha_\nu a_\nu^\mu}$

$\Rightarrow (h^*, \varphi_\nu) = \sum_\mu \overline{a_\nu^\mu}(h, \varphi_\mu)$, da $\{\alpha_\nu\}$ beliebige endl. Menge kompl. Zahlen

Definition II.4

Die Matrix α_ν^μ heißt quasidiagonal vom Grade j , wenn gilt $\alpha_\nu^\mu = 0$ für $\mu > \nu + j$, $\mu < \nu - j$

d.h. α_ν^μ hat die Gestalt



Lemma II.9

Sei α_ν^μ eine quasidiagonale Matrix und es gelte

$$\sum_\nu \sum_\mu \alpha_\nu^\mu < \infty \,, \quad \sum_\mu \sum_\nu \alpha_\nu^\mu < \infty \,.$$

Dann gilt

$$\sum_\nu \sum_\mu \alpha_\nu^\mu = \sum_\mu \sum_\nu \alpha_\nu^\mu$$

Beweis:

Da α_ν^μ quasidiagonal ist, können wir auch schreiben

$$\sum_\nu \sum_\mu \alpha_\nu^\mu = \sum_\nu \alpha_\nu \,, \quad \sum_\mu \sum_\nu \alpha_\nu^\mu = \sum_\nu \alpha_\nu'$$

wobei in der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu'$$

alle Summanden der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{n-\tilde{j}} \alpha_\nu$$

auftreten ($\tilde{j} \in \mathbb{N}$, $\tilde{j}$ von n unabhängig, z.B. $\tilde{j} > (2j+1)^2$)

Somit ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu' = \sum_{\nu=1}^{n-\tilde{j}} \alpha_\nu + \sum_{\nu > n-\tilde{j}} \alpha_\nu' + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \alpha_\nu'$$

wobei der 2. Term höchstens $\tilde{j}$ Summ. enthält

Wir beweisen nun $\sum_\nu \alpha_\nu = \sum_\nu \alpha_\nu'$:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu' \right|$$

$$= \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu - \sum_{\nu=1}^{n-\tilde{j}} \alpha_\nu - \sum_{\nu > n-\tilde{j}} \alpha_\nu' - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \alpha_\nu' \right|$$

$$\leq \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu - \sum_{\nu=0}^{n-\tilde{j}} \alpha_\nu \right| + \left| \sum_{\nu > n-\tilde{j}} \alpha_\nu' \right| + \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \alpha_\nu' \right| = A_n + B_n + C_n$$

Diese drei Terme lassen sich wie folgt abschätzen:

$$A_n = \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu - \sum_{\nu=1}^{n-\tilde{j}} \alpha_\nu \right| < \varepsilon/3 \quad \text{für} \quad n \geq n_1(\varepsilon)$$

Da aufgrund der Konvergenz von $\sum \alpha_\nu'$ $\alpha_\nu' \to 0$ gilt,

ergibt sich $B_n = \left| \sum_{\nu > n-\tilde{j}} \alpha_\nu' \right| < \varepsilon/3$ für $n \geq n_2(\varepsilon)$ (höchstens j Summ.)

$$C_n = \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \alpha_\nu' \right| < \varepsilon/3 \quad \text{für } n \geq n_3(\varepsilon), \text{da } \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu' \text{ existiert.}$$

Somit gilt $A_n + B_n + C_n < \varepsilon$ für $n \geq n(\varepsilon) := \max\left\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon), n_3(\varepsilon)\right\}$

d.h. $$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu' \right| = 0$$

Mit Hilfe von Lemma II.9 können wir jetzt die wesentliche Selbst-Adjungiertheit quasidiagonaler Operatoren beweisen:

Lemma II.10

$\{\varphi_\nu\}$ sei v.o.n.S. in H und A sei symmetrischer Operator auf $\mathfrak{D}_A = LH\{\varphi_\nu\}$, definiert durch

$A\varphi_\nu = \sum_\mu a^\mu_\nu \varphi_\mu$, wobei a^μ_ν eine quasidiagonale Matrix ist.

Dann ist A auf $\mathfrak{D}_A$ w.s.a.

Beweis:

Es genügt zu zeigen, daß es zu jedem $g \in \mathfrak{D}_{A^*}$ eine Folge $\mathfrak{D}_A \ni g_\kappa \xrightarrow{H\text{-}\sigma} g \in \mathfrak{D}_{A^*}$ gibt mit $A^* g_\kappa \xrightarrow{(H,\|_{A^*})} A^* g$ (Lemma II.5).

Sei nun $g \in \mathfrak{D}_{A^*}$, $\mathfrak{D}_A \ni g_\kappa := \sum_{\nu=1}^{\kappa} (g, \varphi_\nu)\varphi_\nu$, $g_\kappa \xrightarrow{H\text{-}\sigma} g$.

Es gilt für $f \in \mathfrak{D}_{A^*}$:

i) $(A^* g, f) = \sum_\nu (g^*, \varphi_\nu)(\varphi_\nu, f)$

$= \sum_\nu \sum_\mu a^\nu_\mu (g, \varphi_\mu)(\varphi_\nu, f)$ (Lemma II.8-iii)

$= \sum_\mu \sum_\nu (g, \varphi_\nu) a^\nu_\mu (\varphi_\mu, f)$ $(\nu \leftrightarrow \mu)$

ii) $(g, A^* f) = \sum_\nu (g, \varphi_\nu)(\varphi_\nu, f^*)$

$= \sum_\nu \sum_\mu (g, \varphi_\nu) a^\mu_\nu (\varphi_\mu, f)$ (Lemma II.8-iii)

iii) Da $\alpha^\mu_\nu = (g, \varphi_\nu) a^\mu_\nu (\varphi_\mu, f)$

alle Voraussetzungen von Lemma II.9 erfüllt (folgt aus i), ii) und der Quasidiagonalität von a^μ_ν), erhält man

$(A^* g, f) = \sum_\nu \sum_\mu (g, \varphi_\nu) a^\mu_\nu (\varphi_\mu, f)$

$= \lim_{\kappa\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\kappa} \sum_\mu (g, \varphi_\nu) a^\mu_\nu (\varphi_\mu, f)$

$= \lim_{\kappa\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\kappa} (g, \varphi_\nu)(A\varphi_\nu, f) = \lim_{\kappa\to\infty} (Ag_\kappa, f)$

d.h. $(Ag_\kappa, f) \longrightarrow (A^* g, f)$ für alle $f \in \mathfrak{D}_{A^*}$.

Somit ist $A^* g_\kappa \xrightarrow{(H,\|_{A^*})} A^* g$ nachgewiesen, d.h. nach Lemma II.5-iv) die wesentliche Selbst-Adjungiertheit von A auf $\mathfrak{D}_A$ gezeigt.

Anmerkung

Aus dem Beweis von Lemma II.10 geht auch hervor, daß A^* auf $\mathfrak{D}_{A^*}$ symmetrisch ist (s. i) und ii)), was ebenfalls die wesentliche Selbst-Adjungiertheit von A auf $LH\{\varphi_\nu\}$ impliziert.

Beispiel einer quasidiagonalen unbeschränkten Matrix:

$$a^{\mu}_{\nu} = \sqrt{\nu}\,\delta_{\nu,\mu-1} + \sqrt{\nu-1}\,\delta_{\nu,\mu+1}$$

d.h.

$$a^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

Der symmetrische Operator $A\varphi_\nu := \sum a^{\mu}_{\nu}\varphi_\mu$ auf $LH\{\varphi_\nu\}$ ($\{\varphi_\nu\}$ ist ein v.o.n.S. in H) ist unbeschränkt.

Beweis: $A\varphi_\nu = a^{\mu}_{\nu}\varphi_\nu = \sqrt{\nu}\,\varphi_{\nu+1} + \sqrt{\nu-1}\,\varphi_{\nu-1}$

$\|A\varphi_\nu\| = \sqrt{\nu+\nu-1} = \sqrt{2\nu-1}$

d.h. A ist auf der Einheitskugel unbeschränkt

$\Rightarrow$ A ist unbeschränkter Operator.

Anmerkung

A ist nach Lemma II.10 w.s.a.

Das Ergebnis von Lemma II.10 ist also auch für bestimmte unbeschränkte Operatoren von Interesse, d.h. Lemma II.10 findet nichttriviale Anwendungen. *)

---

*) Ein beschränkter symmetrischer Operator ist stets w.s.a.

Für spätere Anwendungen in Kapitel V ist noch folgendes Ergebnis von Interesse:

Lemma II.11

Endliche Linearkombinationen und endliche Produkte quasidiagonaler Matrizen ergeben wieder eine quasidiagonale Matrix.

Beweis:

i) endliche Linearkombinationen: trivial.

ii) Produkt:

α^{μ}_{ν}, β^{μ}_{ν} seien zwei quasidiagonale Matrizen vom Grade j_α bzw. j_β.

Dann gilt

$$\alpha^{\mu}_{\kappa}\,\beta^{\kappa}_{\nu} = 0 \quad \text{für} \quad |\mu-\nu| > j_\alpha + j_\beta ,$$

d.h.das Produkt von α^{μ}_{ν} und β^{μ}_{ν} ist eine quasidiagonale Matrix.

III TRIPLETS UND WESENTLICH SELBST-ADJUNGIERTE OPERATOREN

Wir kommen nun zu weitergehenden topologischen Charakterisierungen w.s.a. Operatoren. Im Gegensatz zu den Betrachtungen des vorhergehenden Kapitels, wo die topologisch verlangten Strukturen vom adjungierten Operator (A^* , $\mathfrak{D}_{A^*}$) abhängen (s.z.B. Lemma II.5), werden hier nur topologische Forderungen an den vorgegebenen symmetrischen Operator (A , $\mathfrak{D}_A$) betrachtet (s.z.B. Lemma III.13). Der Bereich $\mathfrak{D}_{A^*}$ des adjungierten Operators ist nur in mengentheoretischer Hinsicht von Bedeutung (vgl. dazu die Lemma III.13 folgende Anmerkung).
Die für die wesentliche Selbst-Adjungiertheit eines symmetrischen Operators relevanten topologischen Forderungen an den Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A$ lassen sich am besten im sog. "Triplet-Formalismus" darstellen. Wir definieren daher zunächst in Abschnitt III.1 Triplets (Definition III.1) und diskutieren einige später benötigte Eigenschaften.
In III.2 werden Operatoren in Triplets betrachtet, die bestimmten topologischen Forderungen genügen. Weiterhin werden für s.a. Operatoren mit Hilfe von analytischen Vektoren Triplets konstruiert, die spezielle Invarianzeigenschaften besitzen.
Im letzten Abschnitt III.3 kommen wir dann mit Hilfe der Ergebnisse aus III.1 und III.2 zu den äquivalenten topologischen Charakterisierungen w.s.a. Operatoren (z.B. Lemma III.13) .

III.1 Triplets

In diesem Abschnitt definieren wir Triplets und betrachten dann topologische Eigenschaften von Triplets, die im Zusammenhang mit Operatoren in Triplets (Abschnitt III.2 und III.3) von Bedeutung sind.

Lemma III.1

Sei H ein Hilbertraum und ϕ ein lineartopologischer Raum. ϕ' sei der Dualraum von ϕ *) .

Es gelte dicht

(T1) $\phi \subset H$

(T2) ϕ ist feiner als $(\phi, \mathrm{Top}\ H)$ **)

Dann existiert eine injektive Abbildung

$$i : H \longrightarrow \phi'$$

definiert durch

$$(ih)(\varphi) := (h,\varphi)_H \qquad (h \in H, \varphi \in \phi)$$

Beweis:

i) $ih \in \phi'$ wegen (T2)

ii) i ist injektiv wegen (T1)

Vereinbarung

Im folgenden schreiben wir $h_i, \phi_i, H_i, \ldots$ an Stelle von $ih, i\phi, iH, \ldots$

Definition III.1

Es gelten alle Voraussetzungen von Lemma III.1 .

Dann nennen wir

$$\phi_i \subset H_i \subset \phi'$$

ein Triplet.

Dabei ist ϕ_i ein lineartopologischer und H_i ein Hilbert'scher Raum (i erzeugt eine Identifizierungstopologie).

Es gilt also:

$$(h_i, g_i)_{H_i} = (h,g)_H \quad \text{für alle } h,g \in H .$$

---

*) d.h. ϕ' ist der Raum aller stetigen Linearformen auf ϕ .

**) $(\phi, \mathrm{Top}\ H)$ ist der Raum ϕ ,versehen mit der durch H_β induzierten Spurtopologie.

Lemma III.2

Sei $\phi_i \subset H_i \subset \phi'$ ein Triplet.
Dann ist H_i feiner als $(H_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\beta)$. *)

Beweis:

Sei U Nullumgebung in $(H_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\beta)$, d.h.

$$U = U_{B,\varepsilon} = \{ h_i : h_i \in H,\ |h_i(\varphi)| < \varepsilon \text{ für alle } \varphi \in B \}$$
$$= \{ h_i : h_i \in H_i,\ |(h_i, \varphi_i)| < \varepsilon \text{ für alle } \varphi_i \in B_i \}^{(B \text{ beschr. in } \phi,\ \varepsilon > 0)}$$

Da ϕ_i feiner als $(\phi_i, \mathrm{Top}\, H_i)$ ist, ist B_i auch beschränkt in H_i, d.h. $U = U_{B,\varepsilon}$ ist auch Nullumgebung in H_i.

Lemma III.3

Sei $\phi_i \subset H_i \subset \phi'$ ein Triplet.
Dann ist die Bilinearform

$$(\ ,\ )_{\phi_i} : (\phi_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\sigma) \times (\phi_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\sigma) \longrightarrow \mathbb{C}$$

definiert durch $(\varphi_i, \psi_i)_{\phi_i} := (\varphi_i, \psi_i)_{H_i} \equiv (\varphi, \psi)_H$
separiert stetig.
Analoges gilt für ϕ'_β.

Beweis:

Wir zeigen, daß für jedes $\varphi_{oi} \in \phi_i$ die Abbildung

$$\tilde{\varphi}_o : (\phi_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\sigma) \ni \varphi_i \longrightarrow (\varphi_i, \varphi_{oi})_{H_i} \in \mathbb{C}$$

stetig ist:
Sei in $\mathbb{R}$ die ε-Nullumgebung $\mathcal{U}_\varepsilon = \{ r \in \mathbb{R} : |r| < \varepsilon \}$ gegeben.
Als Nullumgebung in $(\phi_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\sigma)$ sei

$$\mathcal{U}_{\varepsilon,\varphi_o} = \{ \varphi_i \in \phi_i : |\varphi_i(\varphi_o)| < \varepsilon \}$$
$$= \{ \varphi_i \in \phi_i : |(\varphi_i, \varphi_{oi})_{H_i}| < \varepsilon \} \text{ gewählt.}$$

Wir sehen sofort, daß das Bild von $U_{\varepsilon,\varphi_o}$ unter der Abbildung $\tilde{\varphi}_o$ in U_ε liegt.

Da ϕ'_β feiner als ϕ'_σ ist, gilt analoges natürlich auch für ϕ'_β.

---

*) $(H_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\beta)$ meint den Raum H_i, versehen mit der durch ϕ'_β induzierten Topologie; geben wir zu H_i nicht explizit eine Topologie an, so meinen wir $H_{i\beta}$.

III.2 Operatoren in Triplets

Wir definieren stetige Operatoren in Triplets, deren duale Operatoren und zeigen den Zusammenhang zwischen dualen und adjungierten Operatoren (Lemma III.6) . Anschließend geben wir ein Verfahren an, nach dem man zu jedem Operator ein Triplet konstruieren kann, in dem dieser stetig ist (Lemma III.7).
Weiterhin werden für eine bestimmte Klasse w.s.a. Operatoren solche Triplets mit einer weiteren topologischen Eigenschaft angegeben (Lemma III.8) .

Sei $\phi_i \subset H_i \subset \phi'$ ein Triplet und sei
$A : \phi \longrightarrow H$ ein stetiger Operator.
Dann definieren wir den (stetigen) Operator
$A_i : \phi_i \longrightarrow H_i$ durch $A_i \varphi_i = (A\varphi)_i \quad (\varphi \in \phi)$

Weiterhin definieren wir den zu A dualen Operator

$$A_i' : H_i \longrightarrow \phi' \qquad (h_i \in H_i, \varphi \in \phi)$$

durch $$(A_i' h_i)(\varphi) := h_i(A\varphi) = (h, A\varphi)_H = (h_i, A_i\varphi_i)_{H_i} .$$

Lemma III.4

Sei $\phi_i \subset H_i \subset \phi'$ ein Triplet und
$A_i : \phi_i \longrightarrow H_i$ ein stetiger Operator.
Dann ist

$$A_i' : H_i \longrightarrow \phi_\beta'$$

ein stetiger Operator.

Beweis:
Sei $h_{in} \xrightarrow{H_i} 0$ eine Nullfolge in H_i .
Wir zeigen jetzt, daß dann auch $A_i' h_{in}$ in ϕ_β' gegen Null konvergiert:
Sei B_i beschränkt in ϕ_i , dann ist wegen der Stetigkeit von A_i auch $A_i(B_i)$ beschränkt in H_i.
Folglich impliziert $h_{in} \xrightarrow{H_i} 0$

$$| (h_{in}, A_i(B_i))_{H_i} | < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq n(A_i(B_i), \varepsilon)$$

d.h. $|(A_i' h_{in})(B)| < \varepsilon$ für $n \geq \tilde{n}(B,\varepsilon)$, B beschr.in ϕ.
Somit gilt $A_i' h_{in} \xrightarrow[n\to\infty]{\phi_b'} 0$

Anmerkung

Analoges gilt,wenn man an Stelle der starken Topologien die schwachen Topologien betrachtet.

Lemma III.5

Sei $\phi_i \subset H_i \subset \phi'$ ein Triplet und sei
$A_i : \phi_i \longrightarrow H_i$ ein stetiger symmetrischer Operator.
Dann gilt:
Die Einschränkung von A_i' auf ϕ_i liefert A_i,
d.h. $A_i'|_{\phi_i} = A_i$.

Beweis:

Seien $\varphi_i \in \phi_i$, $\psi \in \phi$.
Dann erhalten wir

$$(A_i' \varphi_i)(\psi) = \varphi_i(A\psi) = (\varphi, A\psi) = (A\varphi, \psi) = (A_i\varphi_i)(\psi).$$

Wir wenden uns nun dem Zusammenhang zwischen dualem und adjungiertem Operator zu.Dafür benötigen wir folgende

Definition III.2

Sei $\phi_i \subset H_i \subset \phi'$ ein Triplet und
$A_i : \phi_i \longrightarrow H_i$ ein stetiger Operator.
Dann bezeichnen wir mit
$\mathcal{D}_{A_i'}$
die Menge $\mathcal{D}_{A_i'} := \{h_i \in H_i : A_i' h_i \in H_i\} \subset H_i$.

Lemma III.6

Seien die Voraussetzungen von Definition III.2 gegeben.
Dann gilt:

$$(A_i^*, \mathcal{D}_{A_i^*}) = (A_i', \mathcal{D}_{A_i'})$$

Beweis:

$$\vartheta_{A_i'} = \{ h_i \in H_i : A_i' h_i \in H_i \}$$

$$\circledast = \{ h_i \in H_i : \exists\, h_i' \in H_i \;\; \forall \varphi \in \phi \;\; (A_i' h_i)(\varphi) = h_i'(\varphi) \}$$

$$\circledast\circledast = \{ h_i \in H_i : \exists\, h_i' \in H_i \;\; \forall \varphi_i \in \phi_i : (h_i, A_i \varphi_i)_{H_i} = (h_i', \varphi_i) \}$$

$$= \vartheta_{A_i^*}$$

Weiterhin gilt für alle $h_i \in \vartheta_{A_i'} = \vartheta_{A_i^*}$:

$$A_i^* h_i \overset{\circledast\circledast}{=} h_i' \overset{\circledast}{=} A_i' h_i$$

Wir zeigen nun, daß man zu jedem Operator $A : \vartheta_A \longrightarrow H$ auf ϑ_A eine Topologie $\mathrm{Top}\,\vartheta_A$ einführen kann, so daß das Triplet

$$(\vartheta_A, \mathrm{Top}\,\vartheta_A)_i \subset H_i \subset (\vartheta_A, \mathrm{Top}\,\vartheta_A)'$$

existiert und

$$A : (\vartheta_A, \mathrm{Top}\,\vartheta_A) \longrightarrow H$$

stetig ist:

Lemma III.7

Zu jedem Operator $A : \vartheta_A \to H$ gibt es auf ϑ_A eine lokalkonvexe Topologie $\mathrm{Top}\,\vartheta_A$, so daß gilt:

i) $(\vartheta_A, \mathrm{Top}\,\vartheta_A)$ ist feiner als $(\vartheta_A, \mathrm{Top}\,H)$.

ii) $A : (\vartheta_A, \mathrm{Top}\,\vartheta_A) \longrightarrow H$ ist stetig.

Beweis:

Wähle auf ϑ_A die durch folgende Halbnormen definierte Topologie ($\varphi \in \vartheta_A$) : $\|\varphi\|_1 := \|\varphi\|_H$, $\|\varphi\|_2 := \|A\varphi\|_H$.

Für diese mit $\mathrm{Top}\,\vartheta_A$ bezeichnete Topologie gilt

i) $\vartheta_A \ni \varphi_n \xrightarrow{\mathrm{Top}\,\vartheta_A} 0 \;\Rightarrow\; \varphi_n \xrightarrow{H} 0$.

ii) $\vartheta_A \ni \varphi_n \xrightarrow{\mathrm{Top}\,\vartheta_A} 0 \;\Rightarrow\; A\varphi_n \xrightarrow{H} 0$.

i) und ii) sind äquivalent mit den Aussagen i) und ii) von Lemma III.7 .

Anmerkung

Wir bezeichnen die im Beweis von Lemma III.7 eingeführte Topologie mit τ_A bzw. $\tau_{(A,\mathfrak{D}_A)}$, falls die Angabe des Definitionsbereiches nötig ist.

Ein weiteres Problem ist die Frage, wann man bei einem vorgegebenen Operator $A: \mathfrak{D}_A \longrightarrow H$ einen dichten invarianten Bereich ϕ mit einer linearen Topologie $\mathrm{Top}\,\phi$ finden kann, so daß gilt:

i) $(\phi, \mathrm{Top}\,\phi)$ ist feiner als $(\phi, \mathrm{Top}\,H)$

ii) $A : (\phi, \mathrm{Top}\,\phi) \longrightarrow (\phi, \mathrm{Top}\,\phi)$ ist stetig.

Eine positive Antwort ergibt sich für symmetrische Operatoren mit dichtem Bereich analytischer Vektoren, z.B. s.a. Operatoren.

Wir kommen nun also zu

Lemma III.8

Sei $A : \mathfrak{D}_A \longrightarrow H$ ein dicht definierter symmetrischer linearer Operator und sei $\mathfrak{D}_A^{an}$ dicht in H. $(\mathfrak{D}_A^{an} \subset \mathfrak{D}_A)$
Dann existiert auf dem linearen invarianten Bereich $\mathfrak{D}_A^{an}$ eine lineare Topologie $\mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A^{an}$, derart, daß gilt:

i) $(\mathfrak{D}_A^{an}, \mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A^{an})$ ist feiner als $(\mathfrak{D}_A^{an}, \mathrm{Top}\,H)$

ii) $A : (\mathfrak{D}_A^{an}, \mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A^{an}) \longrightarrow (\mathfrak{D}_A^{an}, \mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A^{an})$ ist stetig.

Beweis:

a.) Definition von $\mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A^{an}$:
Für $n \in \mathbb{N}$ führen wir auf $\mathfrak{D}_A^{an}$ eine Norm $\|\ \|_n$ ein:

$$\|\varphi\|_n := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\|A^\nu \varphi\|}{\nu!}\, n^\nu \qquad (\varphi \in \mathfrak{D}_A^{an})$$

Es gilt: $\|\varphi\|_n < \infty$ ([1]) und $\|\varphi\|_n$ erfüllt für $n \in \mathbb{N}$ alle Eigenschaften einer Norm.
Diese abzählbar vielen Normen erzeugen auf $\mathfrak{D}_A^{an}$ eine lokalkonvexe Topologie, die wir mit $\mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A^{an}$ bezeichnen.

b.) $(\mathcal{D}_A^{an}, \mathrm{Top}\,\mathcal{D}_A^{an})$ ist feiner als $(\mathcal{D}_A^{an}, \mathrm{Top}\ H)$:

Es gelte $\mathcal{D}_A^{an} \ni \varphi_j \xrightarrow{\mathrm{Top}\,\mathcal{D}_A^{an}} 0$

d.h. $\|\varphi_j\|_n \xrightarrow{j\to\infty} 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt aufgrund der Definition von $\|\ \|_n$

$$\|A\varphi_j\|_H \longrightarrow 0$$

d.h. $A\varphi_j \xrightarrow{H} 0$.

c.) $A : (\mathcal{D}_A^{an}, \mathrm{Top}\,\mathcal{D}_A^{an}) \longrightarrow (\mathcal{D}_A^{an}, \mathrm{Top}\,\mathcal{D}_A^{an})$

ist stetig:

Es gelte $\mathcal{D}_A^{an} \ni \varphi_j \xrightarrow{\mathrm{Top}\,\mathcal{D}_A^{an}} 0$ d.h. $\|\varphi_j\|_n \xrightarrow{j\to\infty} 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen nun

$$A\varphi_j \xrightarrow{\mathrm{Top}\,\mathcal{D}_A^{an}} 0 \ , \ \text{d.h.} \ \|A\varphi_j\|_n \xrightarrow{j\to\infty} 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}:$$

Sei $n \in \mathbb{N}$; es gilt nach Voraussetzung

$$\|\varphi_j\|_m \xrightarrow{j\to\infty} 0 \ \text{für} \ m = 2n$$

Dann ergibt sich

$$\|A\varphi_j\|_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\|A^{\nu+1}\varphi_j\|}{\nu!}\, n^{\nu}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\|A^{\nu+1}\varphi_j\|}{2^{\nu+1}\,\nu!}\,(2n)^{\nu+1} \quad \leq \quad (2^{\nu+1} \geq \nu+1)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\|A^{\nu+1}\varphi_j\|}{(\nu+1)!}\,(2n)^{\nu+1} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\|A^{\nu+1}\varphi_j\|}{(\nu+1)!}\, n^{\nu+1}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\|\varphi_j\|_m - \|\varphi_j\|\right) \xrightarrow{j\to\infty} 0$$

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben war, haben wir

$$A\varphi_j \xrightarrow{\mathrm{Top}\,\mathcal{D}_A^{an}} 0 \quad \text{gezeigt.}$$

Anmerkungen

1 Es gilt natürlich auch

i) $A : (\mathcal{D}_A^{an}, \mathrm{Top}\,\mathcal{D}_A^{an}) \longrightarrow H$ ist stetig.

ii) $A : (\mathcal{D}_A^{an}, \tau_{(A,\mathcal{D}_A^{an})}) \longrightarrow H$ ist stetig.

2 $(\mathcal{D}_A^{an}, \mathrm{Top}\,\mathcal{D}_A^{an})$ ist feiner als $(\mathcal{D}_A^{an}, \tau_{(A,\mathcal{D}_A^{an})})$:

$$\mathcal{D}_A^{an} \ni \varphi_j \xrightarrow{\mathrm{Top}\,\mathcal{D}_A^{an}} 0 \overset{(n=1)}{\Longrightarrow} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\|A^{\nu}\varphi_j\|}{\nu!} \longrightarrow 0$$

$$\underset{(\nu=0,1)}{\Longrightarrow} \|\varphi_j\| \longrightarrow 0 \ , \ \|A\varphi_j\| \longrightarrow 0 \ \text{d.h.} \ \varphi_j \xrightarrow{\tau_{(A,\mathcal{D}_A^{an})}} 0$$

III.3 Kriterien für wesentlich selbst-adjungierte Operatoren

Unsere Betrachtungen über Triplets und Operatoren wollen wir nun dazu verwenden, weitere äquivalente topologische Charakterisierungen w.s.a. Operatoren anzugeben. Nach einigen vorbereitenden Definitionen und einem Lemma kommen wir in Lemma III.11 zu verschiedenen topologischen Eigenschaften w.s.a. Operatoren. Dann zeigen wir, daß diese Charakterisierungen auch hinreichend für die wesentliche Selbst-Adjungiertheit eines symmetrischen Operators sind (Lemma III.12) .
Abschließend werden spezielle, topologisch gekennzeichnete Klassen w.s.a. Operatoren betrachtet.

Wir definieren nun (z.T. wiederholend) :

Definition III.3

Sei $A : \mathfrak{D}_A \longrightarrow H$ ein Operator.
Dann bezeichnen wir mit τ_A die Topologie auf $\mathfrak{D}_A$, die durch die beiden Normen

$$\|\varphi\|_1 := \|\varphi\|_H \,, \quad \|\varphi\|_2 := \|A\varphi\|_H \qquad (\varphi \in \mathfrak{D}_A)$$

gegeben ist.
Den dualen Raum von $(\mathfrak{D}_A, \tau_A)$, versehen mit der starken Topologie, bezeichnen wir mit

$$(\mathfrak{D}_A, \tau_A)'_\beta \equiv (\mathfrak{D}_A', \tau_A')$$

Für unsere weiteren Untersuchungen ist das folgende Lemma wesentlich :

Lemma III.9

Sei $\phi_i \subset H_i \subset \phi_i'$ ein Triplet, $\mathcal{L}_i := \{ \mathcal{B} \subset \phi_i : \mathcal{B} \text{ beschränkt in } \phi_i \}$ und sei L ein linearer Raum mit $\phi_i \subset L \subset H_i$.
Dann gelten für die Aussagen

1. $\bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{L}_i} \overline{\mathcal{B}}^{H_i} \supset L$
2. $\bigcup_{\mathcal{B}_i \in \mathcal{L}_i'} \overline{\mathcal{B}_i}^{\phi_i'_\beta} \supset L_i$ ($\mathcal{L}_i' = \{ \mathcal{B}_i' : \mathcal{B} \in \mathcal{L}_i \}$)
3. $(\cdot,\cdot)_{H_i}$ ist auf $(L_i, \mathrm{Top}\,\phi_i'_\beta) \times (L_i, \mathrm{Top}\,\phi_i'_\beta)$ separiert stetig
4. $(f_i, \,)_{H_i}$ ist für $f_i \in L_i$ stetig auf $(\phi_i, \mathrm{Top}\,\phi_i'_\beta)$

folgende Implikationen:

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$$

Beweis:

1 ⇒ 2 :

H_i ist feiner als $(H_i, \mathrm{Top}\, \phi_\beta')$ (Lemma III.2)

$$\Rightarrow \bigcup_{\beta \in \mathfrak{b}} \overline{B}_i^{H_i} \subset \bigcup_{\beta \in \mathfrak{b}} \overline{B}_i^{\phi_\beta'}$$

2 ⇒ 3 :

a.) Die separiert stetige Bilinearform (Lemma III.3)

$$(\ , \ )_{\phi_i} : (\phi_i, \mathrm{Top}\, \phi_\beta') \times (\phi_i, \mathrm{Top}\, \phi_\beta') \longrightarrow \mathbb{C}$$

läßt sich separiert stetig zu

$$(\ , \ )_{L_i} : (L_i, \mathrm{Top}\, \phi_\beta') \times (L_i, \mathrm{Top}\, \phi_\beta') \longrightarrow \mathbb{C}$$

fortsetzen, da $(\ , \ )_{\phi_i}$ $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{v}_i)$ - hyperstetig ist und

$\bigcup_{\beta \in \mathfrak{b}} \overline{B}_i^{\phi_\beta'}$ L umfäßt ([10] S.90) . (vgl.Anh.Kap.III).

b.) $(\ , \ )_{L_i} = (\ , \ )_{H_i}$:

Seien $f_i, g_i \in L_i$ und es gelte

$$\left.\begin{array}{l} \phi_i \ni f_{i,n} \xrightarrow[n\to\infty]{H_i} f_i \\ \phi_i \ni g_{i,n} \xrightarrow[n\to\infty]{H_i} g_i \end{array}\right\} \Rightarrow f_{i,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\phi_\beta'} f_i \text{ (Lemma III.2)}$$

Dann ergibt sich für $f_i, g_i \in L_i$:

$$(f_i, g_i)_{H_i} = \lim_n \lim_m (f_{i,n}, g_{i,m})_{H_i}$$

$$= \lim_n \lim_m (f_{i,n}, g_{i,m})_{\phi_i} = (f_i, g_i)_{L_i}$$

Somit ist unter Voraussetzung 2 das innere Produkt

$(\ , \ )_{H_i}$ auf $(L_i , \mathrm{Top}\, \phi_\beta')$ × $(L_i , \mathrm{Top}\, \phi_\beta')$

separiert stetig, d.h. Aussage 3 gilt.

3 ⇒ 4 :

Diese Implikation ist wegen $L \supset \phi$ trivial .

Wir beweisen jetzt eine topologische Eigenschaft w.s.a. Operatoren, die sich später (Lemmata III.12 und III.13) auch als hinreichend für die wesentliche Selbst-Adjungiertheit symmetrischer Operatoren herausstellen wird.

Lemma III.10

Sei $A : \mathfrak{D}_A \longrightarrow H$ ein w.s.a. Operator und sei

$$\mathfrak{b} := \{ B \subset \mathfrak{D}_A \;:\; B \text{ beschränkt in } (\mathfrak{D}_A, \mathfrak{T}_A) \}$$

Dann gilt:

$$\bigcup_{B \in \mathfrak{b}} \overline{B}^{H} \supset \mathfrak{D}_{A^*} .$$

Beweis:

Sei $x \in \mathfrak{D}_{A^*}$.

Aufgrund der wesentlichen Selbst-Adjungiertheit von A gilt nach Lemma I.12

$$A^* = \widetilde{A}$$

d.h. $x \in \mathfrak{D}_{\widetilde{A}}$.

Somit ergibt sich (Definition I.3)

$$x = \lim^{H} x_n \qquad \text{für eine Folge} \quad \{x_n\} \subset \mathfrak{D}_A ,$$

wobei $A x_n$ in H konvergiert.

Also sind x_n und $A x_n$ Cauchyfolgen in H, d.h. x_n ist Cauchyfolge in $(\mathfrak{D}_A, \mathfrak{T}_A)$.

Folglich ist $\{x_n\}$ beschränkt in $(\mathfrak{D}_A, \mathfrak{T}_A)$ ([9] S.156).

Wir haben also

$$x \in \overline{\{x_n\}}^{H} , \qquad \{x_n\} \in \mathfrak{b} ,$$

und damit

$$x \in \bigcup_{B \in \mathfrak{b}} \overline{B}^{H} .$$

Lemma III.10 impliziert zusammen mit Lemma III.9 das nun folgende Lemma:

Lemma III.11

Sei $A : \mathfrak{D}_A \longrightarrow H$ ein w.s.a. Operator und sei

$$\mathfrak{b} := \{ B \subset \mathfrak{D}_A : B \text{ beschränkt in } (\mathfrak{D}_A, \mathfrak{T}_A) \}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

1 $\bigcup_{B \in \mathfrak{b}} \overline{B}^H \supset \mathfrak{D}_{A^*}$

2 $\bigcup_{B_i \in \mathfrak{b}_i} \overline{B_i}^{\mathfrak{D}_A'} \supset \mathfrak{D}_{A^*,i}$

3 $(\ ,\ )_{H_i}$ ist auf $(\mathfrak{D}_{A^*,i}, \operatorname{Top} \mathfrak{D}_A') \times (\mathfrak{D}_{A^*,i}, \operatorname{Top} \mathfrak{D}_A')$ separiert stetig

4 $(f_i, \ )_{H_i}$ ist für $f_i \in \mathfrak{D}_{A^*,i}$ stetig auf $(\mathfrak{D}_{A,i}, \operatorname{Top} \mathfrak{D}_A')$

Beweis:

Nach Lemma III.7 existiert das Triplet

$$\mathfrak{D}_{A,i} \subset H_i \subset \mathfrak{D}_A'$$

Da A symmetrisch ist, gilt $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_{A^*}$. Somit erhalten wir 1 $\Rightarrow$ 2 $\Rightarrow$ 3 $\Rightarrow$ 4 (Lemma III.9). Aussage 1 wurde unter den obigen Voraussetzungen bereits in Lemma III.10 bewiesen.

Das folgende Lemma impliziert die Umkehrung der vorhergehenden Aussage:

Lemma III.12

Sei $A : (\phi, \operatorname{Top}\phi) \longrightarrow H$ ein dicht definierter stetiger und symmetrischer Operator und sei $(\phi, \operatorname{Top}\phi)$ feiner als $(\phi, \operatorname{Top} H)$.
Dann impliziert jede der 4 folgenden Aussagen die wesentliche Selbst-Adjungiertheit von A auf $\mathfrak{D}_A$ in H :

1 $\bigcup_{B \in \mathfrak{b}} \overline{B}^H \supset \mathfrak{D}_{A^*}$, $\mathfrak{b} := \{ B \subset \phi : B \text{ beschränkt in } (\phi, \operatorname{Top}\phi) \}$

2 $\bigcup_{B_i \in \mathfrak{b}_i} \overline{B_i}^{\phi_\beta'} \supset \mathfrak{D}_{A^*,i}$, $\mathfrak{b}_i := \{ B_i : B \in \mathfrak{b} \}$

3 $(\ ,\ )_{H_i}$ ist auf $(\mathfrak{D}_{A^*,i}, \operatorname{Top} \phi_\beta') \times (\mathfrak{D}_{A^*,i}, \operatorname{Top} \phi_\beta')$ sep. stet.

4 $(f_i, \ )_{H_i}$ ist für $f_i \in \mathfrak{D}_{A^*,i}$ stetig auf $(\phi_i, \operatorname{Top} \phi_\beta')$.

Beweis:

Da $\phi_i \subset H_i \subset \phi'$ ein Triplet ist und aufgrund der Symmetrie von A $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_{A^*}$ gilt, erhalten wir nach Lemma III.9 $\underline{1} \Rightarrow \underline{2} \Rightarrow \underline{3} \Rightarrow \underline{4}$. Zum Beweis des Lemmas III.12 ist also nur noch zu zeigen, daß Aussage $\underline{4}$ die wesentliche Selbst-Adjungiertheit von A impliziert:

$\underline{a}$ ϕ_i liegt dicht in (H_i, Top ϕ_β'), denn ϕ_i ist dicht in H_i und H_i ist feiner als (H_i , Top ϕ_β').

$\underline{b}$ Die stetige Fortsetzung der linearen Funktion $(f_i, \cdot)$ von (ϕ_i, Top ϕ_β') auf (H_i , Top ϕ_β') stimmt mit $(f_i, h_i)_{H_i}$ auf H_i überein:
Sei $h_i \in H_i$, $\phi_i \ni h_{i,n} \xrightarrow[H_i]{\phi_\beta'} h_i$. Dann gilt
$(f_i, h_i)_{H_i} = \lim_n (f_i, h_{i,n}) = (f_i, h_i)$

$\underline{c}$ Wir weisen nun die Symmetrie von A_i^* auf $\mathcal{D}_{A_i^*}$ nach:
Seien $f_i, g_i \in \mathcal{D}_{A_i^*}$ und es gelte
$\mathcal{D}_{A_i} \ni g_{i,n} \xrightarrow[n\to\infty]{H_i, \phi_\beta'} g_i$. Dann ergibt sich

$A_i' g_{i,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\phi_\beta'} A_i' g_i$ (Lemma III.4)

und wir erhalten

$$(A_i^* f_i, g_i)_{H_i} = \lim_n (A_i^* f_i, g_{i,n})_{H_i}$$

$$= \lim_n (f_i, A_i g_{i,n})_{H_i} = \lim_n (f_i, A_i' g_{i,n})_{H_i} \text{ (Lemma III.5)}$$

$$= (f_i, A_i' g_i)_{H_i} \quad \text{da} \quad A_i' g_{i,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\phi_\beta'} A_i' g_i \text{ und nach } \underline{b}$$
$(f_i, \cdot)_{H_i}$ sep.stet.auf (H_i, Top ϕ_β') ist.

$$= (f_i, A_i^* g_i)_{H_i} \text{ (Lemma III.6)}$$

Nach Lemma I.11 ist hiermit unter Voraussetzung von $\underline{4}$ die wesentliche Selbst-Adjungiertheit von A gezeigt.

Wir formulieren unsere Ergebnisse jetzt noch in folgender zusammenfassender Weise:

Lemma III.13

Sei $A: \mathfrak{D}_A \to H$ ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{D}_A$ in H. Wir nennen eine Topologie $\mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A$ auf $\mathfrak{D}_A$ "geeignet" bzgl. A , wenn für $\phi = (\mathfrak{D}_A, \mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A)$ gilt:

i) ϕ ist feiner als $(\mathfrak{D}_A, \mathrm{Top}\ H)$.

ii) $A: \phi \to H$ ist stetig.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1 A auf $\mathfrak{D}_A$ in H ist w.s.a.

2 Es gibt eine geeignete Topologie $\mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A$ auf $\mathfrak{D}_A$ mit $\bigcup_{\mathcal{B}\ \text{beschr. in}\ \phi} \overline{\mathcal{B}}^H \supset \mathfrak{D}_{A^*} \quad (\phi = (\mathfrak{D}_A, \mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A))$.

3 Es gibt eine geeignete Topologie $\mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A$ auf $\mathfrak{D}_A$ mit $\bigcup_{\mathcal{B}_i\ \text{beschr. in}\ \phi_i'} \overline{\mathcal{B}_i}^{\phi_\beta'} \supset \mathfrak{D}_{A^*,i} \quad (\phi = (\mathfrak{D}_A, \mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A))$.

4 Es gibt eine geeignete Topologie $\mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A$ auf $\mathfrak{D}_A$ mit $(\cdot,\cdot)_{H_i}$ auf $(\mathfrak{D}_{A^*,i}, \mathrm{Top}\,\phi_\beta') \times (\mathfrak{D}_{A^*,i}, \mathrm{Top}\,\phi_\beta')$ ist separiert stetig.

5 Es gibt eine geeignete Topologie $\mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A$ auf $\mathfrak{D}_A$ mit $(f_i, \cdot)_{H_i}$ ist für $f_i \in \mathfrak{D}_{A^*,i}$ auf $(\mathfrak{D}_{A^*,i}, \mathrm{Top}\,\phi_\beta')$ stetig.

Beweis:

1 $\Rightarrow$ 2: s.Lemma III.10

2 $\Rightarrow$ 3 $\Rightarrow$ 4 $\Rightarrow$ 5 : s.Lemma III.9

5 $\Rightarrow$ 1: s.Lemma III.12 (4)

Anmerkung

Die Aussagen von Lemma III.13 gelten speziell für $\phi = (\mathfrak{D}_A, \tau_A)$.

Anmerkung

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob für einen w.s.a. Operator (A, ϑ_A^{an}) die Topologie Top ϑ_A^{an} (s.Beweis von Lemma III.8) eine Topologie ist, für die Aussage 2, 3, 4 oder 5 von Lemma III.13 gilt. Wahrscheinlich ist dies nicht der Fall, denn

i) Eine äquivalente Charakterisierung w.s.a. Operatoren durch analytische Vektoren ist aufgrund der Sätze I.8 und I.9 und der darauf folgenden Anmerkung nicht zu erwarten.

ii) Die Topologie Top ϑ_A^{an} ist feiner als $\tau_{(A,\tau_A^{an})}$, d.h. $\mathfrak{O}_{\mathrm{Top}\,\vartheta_A^{an}} \subset \mathfrak{O}_{\tau(A,\vartheta_A^{an})}$ und Aussage 2 von Lemma III.13 ist für den Fall der Topologie Top ϑ_A^{an} ungeklärt.

Im folgenden wollen wir die Frage diskutieren, wann es für einen symmetrischen Operator $A : \mathfrak{D}_A \to H$ auf $\mathfrak{D}_A$ eine Topologie $\mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A$ gibt, derart, daß gilt

(B1) $(\mathfrak{D}_A, \mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A)$ ist feiner als $(\mathfrak{D}_A, \mathrm{Top}\, H)$

(B2) $A : (\mathfrak{D}_A, \mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A) \longrightarrow H$ ist stetig

(B3) Für $\mathfrak{b} := \{ \mathcal{B} \subset \mathfrak{D}_A : \mathcal{B}$ beschränkt in $(\mathfrak{D}_A, \mathrm{Top}\,\mathfrak{D}_A) \}$ gilt

$$\bigcup_{\mathcal{B} \in \mathfrak{b}} \overline{\mathcal{B}}^H = H \qquad *)$$

Aus Lemma III.11 folgt, daß solche Operatoren w.s.a. sind. Wir sehen sogleich, daß beschränkte symmetrische Operatoren obige Eigenschaften besitzen:

Lemma III.15

Sei $A : \phi \longrightarrow H$ ein beschränkter Operator, d.h. $A : (\phi, \mathrm{Top}\, H) \longrightarrow H$ ist stetig.

Dann gilt für $\mathfrak{b} := \{ \mathcal{B} \subset \phi : \mathcal{B}$ beschränkt bzgl. Top $H \}$

$$\bigcup_{\mathcal{B} \in \mathfrak{b}} \overline{\mathcal{B}}^H = H$$

Beweis:

Sei $h \in H$ und $\{h_n\} \subset \phi$ eine Folge mit $h_n \xrightarrow{H} h$.

Dann gilt $\{h_n\} \in \mathfrak{b}$, $h \in \overline{\{h_n\}}^H$

d.h. $h \in \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathfrak{b}} \overline{\mathcal{B}}^H$

Da h beliebig aus H war, ist somit $\bigcup_{\mathcal{B} \in \mathfrak{b}} \overline{\mathcal{B}}^H = H$ gezeigt.

Die Frage, ob es auch unbeschränkte Operatoren mit den Eigenschaften (B1), (B2), und (B3) gibt, wird in dieser Arbeit nicht diskutiert.
Wir geben noch einige Kriterien für (B1), (B2) und (B3) an :

---

*) Diese Bedingung ist i.a. schärfer als die bisher diskutierte Bedingung $\bigcup_{\mathcal{B} \in \mathfrak{b}} \overline{\mathcal{B}}^H \supset \mathfrak{D}_A$.

Eine direkte Folge von Lemma III.9 ist

Lemma III.16

Sei $\phi_i \subset H_i \subset \phi'$ ein Triplet und sei
$\mathcal{B} := \{ B \subset \phi : B \text{ beschränkt bzgl. Top } \phi \}$
Dann gelten für die Aussagen

1 $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}^{H} = H$

2 $\bigcup \overline{B_i}^{\phi'_\beta} \supset H_i \quad (B_i \in \mathcal{B}_i)$

3 $(\cdot,\cdot)_{H_i}$ ist auf $(H_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\beta) \times (H_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\beta)$ separiert stetig.

folgende Implikationen:

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \quad .$$

Wir geben nun noch eine äquivalente Bedingung für die 3. Aussage in Lemma III.16 an :

Lemma III.17

Sei $\phi_i \subset H_i \subset \phi'$ ein Triplet.
Dann gilt:
$(\ ,\ )_{H_i} : (H_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\beta) \times (H_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\beta) \longrightarrow \mathbb{C}$
ist separiert stetig
$\Leftrightarrow$
$(H_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\beta)$ ist feiner als $H_{i\sigma}$.

Beweis:

"$\Rightarrow$": Top $H_{i\sigma}$ ist die schwächste Topologie auf H_i derart, daß $(\ ,\ )_{H_i} : H_i \times H_i \longrightarrow \mathbb{C}$ separiert stetig ist.

"$\Leftarrow$" $(\ ,\ )_{H_i}$ ist separiert stetig auf $H_{i\sigma} \times H_{i\sigma}$, was nach Voraussetzung die separierte Stetigkeit von $(\ ,\ )_{H_i}$ auf $(H_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\beta) \times (H_i, \mathrm{Top}\,\phi'_\beta)$ impliziert.

ANHANG ZU KAPITEL III

Unsere Ergebnisse in III.3 basieren z.T. auf einem Satz über die Fortsetzung stetiger Bilinearformen (s.Lemma III.9).Zur Formulierung dieses Satzes benötigen wir zunächst einige Definitionen:

Definition 1

Seien E,F zwei lineare topologische Räume über K. Eine bilineare Abbildung

$$f : E \times F \longrightarrow K$$

heißt separiert stetig,wenn für jedes $x \in E$ und für jedes $y \in F$ die Abbildungen

$f_x : F \ni y \longrightarrow f(x,y) \in K$ und

$f_y : E \ni x \longrightarrow f(x,y) \in K$

stetig sind.

Definition 2

$\mathfrak{A}$ sei eine Familie beschränkter Teilmengen von E, $\mathfrak{B}$ sei eine Familie beschränkter Teilmengen von F. Dann heißt eine Abbildung $f : E \times F \longrightarrow K$ $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-hyperstetig,wenn gilt:

i) f ist separiert stetig.

ii) Für jedes $S \in \mathfrak{A}$ und jede Nullumgebung U in K existiert eine Nullumgebung V in F,so daß $f(S \times V) \subset U$.

Definition 3

$f : E \times F \longrightarrow K$ heißt $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-hyperstetig,wenn f sowohl $\mathfrak{A}$-hyperstetig als auch $\mathfrak{B}$-hyperstetig ist.

Wir kommen nun zu dem angekündigten Satz:

Satz ([10] S.90)

Seien E, E_1, F, F_1 topologische Vektorräume über $\mathbb{C}$, $E \overset{\text{dicht}}{\subset} E_1$, $F \overset{\text{dicht}}{\subset} F_1$.

$\mathcal{S}$ bzw. $\mathcal{T}$ seien Familien beschränkter Teilmengen in E bzw. F.

Sei

$$\mathcal{S}_1 := \{ \overline{S}^{\text{Top}E_1} : S \in \mathcal{S} \}$$

$$\mathcal{T}_1 := \{ \overline{T}^{\text{Top}F_1} : T \in \mathcal{T} \}$$

Es gelte

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} \overline{S}^{\text{Top}E_1} = E_1 \quad , \quad \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \overline{T}^{\text{Top}F_1} = F_1$$

und f sei eine $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-hyperstetige bilineare Abbildung von $E \times F$ in $\mathbb{C}$.

Dann hat f eine eindeutige Fortstzung auf $E_1 \times F_1$, die bilinear und $(\mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1)$-hyperstetig ist.

Um diesen Satz zum Beweis von Lemma III.9, "2 ⇒ 3", zu verwenden, erwähnen wir noch folgendes

Lemma

Sei $\phi_i \subset H_i \subset \phi'$ ein Triplet und $\mathcal{B} := \{ B \subset \phi : B \text{ beschr. in } \phi \}$.

Dann ist die Abbildung

$$(\cdot,\cdot)_{H_i} : (\phi_i, \text{Top}\phi'_\beta) \times (\phi_i, \text{Top}\phi'_\beta) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i)$ - hyperstetig.

Beweis:

1 $(\cdot,\cdot)_{H_i}$ ist separiert stetig auf $(\phi_i, \text{Top}\phi'_\beta) \times (\phi_i, \text{Top}\phi'_\beta)$ (Lemma III.3)

2 Es bleibt noch die $(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i)$-Hyperstetigkeit nachzuweisen:

Sei $B \in \mathcal{B}$ und U_ε Nullumgebung in $\mathbb{C}$.

Dann gilt für die Nullumgebung in $(\phi_i, \text{Top}\phi'_\beta)$

$$\mathcal{U}_{B,\varepsilon} = \{ \varphi_i \in \phi_i , \ |(\varphi, \eta)_{H_i}| < \varepsilon \text{ für alle } \eta \in B \}$$

$$|(\mathcal{U}_{B,\varepsilon}, B_i)_{H_i}| < \varepsilon \quad \text{d.h.} \quad (\cdot,\cdot)_{H_i} \text{ ist } (\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i) \text{ - hyperstetig.}$$

IV VEKTORFELDMETHODEN

In diesem Kapitel wird im wesentlichen das verallgemeinerte Lemma von Nelson bewiesen und hinsichtlich seiner Anwendungsmöglichkeiten untersucht. Es handelt sich dabei um ein Kriterium für die wesentliche Schief-Adjungiertheit schiefsymmetrischer,aus Vektorfeldern konstruierter Operatoren.
Diese Betrachtungen sind grundlegend für die Konstruktion physikalischer Liealgebradarstellungen in Kapitel VI.
Der Aufbau dieses Kapitels gliedert sich wie folgt:
Nach einführenden Definitionen in Abschnitt IV.1 wird im folgenden Abschnitt das verallgemeinerte Lemma von Nelson bewiesen.
Anschließend diskutieren wir in Abschnitt IV.3 Anwendungen des verallgemeinerten Lemmas von Nelson,vor allem in Hinblick auf unsere Untersuchungen in den Kapiteln V und VI (Konstruktion phsikalisch interpretierbarer integrabler und nicht-integrabler Darstellungen von Lie Algebren). Außerdem erhalten wir das Lemma von Nelson (s. IV.3-a).

IV.1 Mannigfaltigkeiten und Vektorfelder

Wir erörtern jetzt die für dieses Kapitel benötigten differentialgeometrischen Grunglagen.

1 Sei M eine C^∞- Mannigfaltigkeit und sei $F(M,p)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen, in einer Umgebung von $p \in M$ definiert. *) Dann heißt eine Abbildung $X : F(M,p) \longrightarrow \mathbb{R}$ Tangentenvektor bei p, wenn X folgenden Bedingungen genügt:

i) X ist eine lineare Abbildung von $F(M,p)$ in $\mathbb{R}$.
ii) $X(fg) = (Xf)g(p) + f(p)(Xg)$ für $f,g \in F(M,p)$.

Jeder Tangentenvektor kann durch eine Kurve $x(t)$ in M mit $x(t_0) = p$ folgendermaßen dargestellt werden:

$$Xf = \frac{df(x(t))}{dt}\Big|_{t=0} \quad \text{für } f \in F(M,p).$$

2 Ein Vektorfeld X auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Zuordnung eines Tangentenvektors X_p zu jedem Punkt $p \in M$.

3 Die Wirkung eines Vektorfeldes X auf differenzierbare Funktionen über M ist gegeben durch

$$(Xf)(p) := X_p f$$

und kann als Vektorfeldoperator in einem Funktionenraum über M angesehen werden. C^∞- Vektorfelder **) transformieren C^∞- Funktionen in C^∞- Funktionen.

4 Sei X ein Vektorfeld auf M. Eine Kurve $\varphi^X_p(t)$ in M mit $\varphi^X_p(0) = p$ heißt Integralkurve von X durch p, wenn für jeden Parameterwert t_0 der Vektor $X_{\varphi^X_p(t_0)}$ tangential zu der Kurve $\varphi^X_p(t)$ bei $\varphi^X_p(t_0)$ verläuft, d.h.

$$X_{\varphi^X_p(t_0)} f = \frac{df(\varphi^X_p(t))}{dt}\Big|_{t=t_0}$$

---

*) Im folgenden erwähnen wir Eigenschaften wie differenzierbar etc. nicht jedes Mal explizit.

**) Wir betrachten weiterhin nur noch C^∞- Vektorfelder.

5 Wir definieren den Translationsoperator $T^X(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ eines C^∞- Vektorfeldes X durch (f sei Funktion auf M)

$$(T^X(t)f)(p) := \begin{cases} f(\gamma^X_p(t)) \\ 0 \text{ falls } \gamma^X_p(t) \text{ nicht existiert.} \end{cases}$$

6 Da die Integralkurven $\gamma^X_p(t)$ eines C^∞- Vektorfeldes X über M im allgemeinen für festes t nicht an allen Punkten der Mannigfaltigkeit definiert sind, ist es zweckmäßig, in M die von X und t abhängige Teilmenge

$$E^X_t := \overline{\{p \in M : \gamma^X_p(t) \text{ ist nicht definiert}\}}$$

zu definieren, wobei mit $\overline{A}$, $A \subset M$, der topologische Abschluß von A in M bezeichnet wird.

IV.2 Das verallgemeinerte Lemma von Nelson

In diesem Abschnitt beweisen wir mit Hilfe der in IV.1 dargelegten differentialgeometrischen Grundlagen ein hinreichendes Kriterium für die wesentliche Schief-Adjungiertheit schiefsymmetrischer Operatoren,die sich aus einem Vektorfeldoperator und einem skalaren Vielfachen des Einheitsoperators zusammensetzen.

Wie aus den Betrachtungen in Abschnitt IV.1 hervorgeht,können Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M als lineare Operatoren in Funktionenräumen über M angesehen werden.Um in diesen Räumen w.sch.a. Operatoren zu definieren,führen wir ein inneres Produkt ein und erhalten durch Abschließung einen Hilbertraum. Durch ein Radon Maß μ auf M ([12]) führt man den Raum $L^2_\mu(M)$ der quadratintegrablen Funktionen bzgl. μ auf M ein,der auf natürliche Weise ein inneres Produkt trägt.Die Konstruktion hängt davon ab,ob so ein Maß immer existiert.Für orientierbare Mannigfaltigkeiten ist die Antwort positiv ([13]).
Ein wichtiger dichter Unterraum von $L^2_\mu(M)$ ist der Raum $F^\infty_o(M)$ der fast überall beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf M mit kompaktem Träger.
Der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger wird mit $C^\infty_o(M)$ bezeichnet.
$C^\infty_o(M)$ ist dicht in $L^2_\mu(M)$ ([12] S. 22),folglich ist auch $F^\infty_o(M)$ dicht in $L^2_\mu(M)$.
Ein weiterer interessanter Funktionenraum ist der Raum $D(M) := \{ \varphi : \varphi \in L^2_\mu(M), \varphi \text{ ist fast überall diff.} \}$ der natürlich auch dicht in $L^2_\mu(M)$ liegt.

Wir kommen jetzt zum angekündigten verallgemeinerten Lemma von Nelson,einem Kriterium für die wesentliche Schief-Adjungiertheit eines schiefsymmetrischen Operators:

Lemma IV.1

Sei M eine C^∞- Mannigfaltigkeit mit Radon Maß μ und $L^2_\mu(M)$ der bzgl. des Maßes μ gebildete Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen auf M.
Sei X ein C^∞- Vektorfeld auf M , das dann als Vektorfeldoperator auf

$$D(M) := \{ \varphi : \varphi \in L^2_\mu(M),\ \varphi \text{ fast überall diff} \}$$

aufgefaßt werden kann.
Sei $E \subset D(M)$ ein linearer Teilraum von D(M) und $\overline{E}$ die topologische Abschließung von E bzgl. des inneren Produkts in $L^2_\mu(M)$ und sei

$$A = X + \lambda I$$

ein schiefsymmetrischer Operator auf E im Hilbert Raum $\overline{E}$.
Weiterhin seien folgende Bedingungen erfüllt:

i) Falls $u \in \mathcal{D}_{A^*} \subset \overline{E}$,dann gilt die Beziehung
$T^X(-t)\, u = e^{(1-\lambda)t} u$ nur für $u \equiv 0$.

ii) Falls $u \in \mathcal{D}_{A^*} \subset \overline{E}$,dann gilt die Beziehung
$T^X(-t)\, u = e^{-(1+\lambda)t} u$ nur für $u \equiv 0$.

iii) $T^X(t)\, E \subset D(M)$

iv) $T^X(-t)\overline{E} \subset \overline{E}$

Dann ist A wesentlich schief-adjungiert auf E in $\overline{E}$.

Beweis:

Es genügt zu zeigen (Lemma I.7),daß sowohl $A^*u = u$ als auch $A^*u = -u$ $u \equiv 0$ implizieren.
Aufgrund von Voraussetzung iii) ist $X\, T^X(t)$ auf E definiert und wir erhalten für $\varphi \in E$:

$$X\, T^X(t)\, \varphi = X\, \varphi(\gamma^X(t)) = \frac{d}{dt} \varphi(\gamma^X(t)) = \frac{d}{dt} T^X(t)\, \varphi$$

(a) Betrachte den Fall $A^* u = u$ $(u \in \overline{E})$.Dann erhalten wir ($A = X + \lambda I$) :

(1) $((X+\lambda I)\, T^X(t)\, \varphi, u) = \frac{d}{dt} (T^X(t)\, \varphi, u) + \lambda (T^X(t)\, \varphi, u)$

(2) $((X+\lambda I)\, T^X(t)\, \varphi, u) = (T^X(t)\, \varphi, (X+\lambda I)^* u) = (T^X(t)\, \varphi, u)$

und damit

$$\frac{d}{dt}\left(T^{X}(t)\varphi, u\right) = (1-\lambda)\left(T^{X}(t)\varphi, u\right)$$

$$\Rightarrow \left(T^{X}(t)\varphi, u\right) = (\varphi, u)\, e^{(1-\lambda)t}$$

$$\Rightarrow \left(\varphi, \left(T^{X}(t)\right)^{*} u - e^{(1-\lambda)t} u\right) = 0 \text{ für alle } \varphi \in E.$$

Wegen $\left(T^{X}(t)\right)^{*} = T^{X}(-t)$ und iv) liegt

$\left(T^{X}(t)\right)^{*} u - e^{(1-\lambda)t} u$ in $\overline{E}$

$\Rightarrow T^{X}(-t)u = e^{(1-\lambda)t} u$ (E dicht in $\overline{E}$)

für alle $u \in \overline{E}$ mit $A^{*}u = u$.

Nach Voraussetzung i) folgt hieraus $u \equiv 0$.

(b) Der Fall $A^{*}u = -u$ liefert nach analoger Rechnung die Relation

$$T^{X}(-t)u = e^{-(1+\lambda)t} u \quad ,$$

was wieder $u \equiv 0$ impliziert (Voraussetzung ii)).

IV.3 Anwendungen

Wir diskutieren nun spezielle Fälle und Anwendungen des obigen Lemmas, vor allem in Hinblick auf Kapitel VI.

a Es sei der Fall $E = C_o^\infty(M)$, $\lambda = 0$, $\mu(E_t^X) = 0$ für ein $t>0$ betrachtet. Dann ist $A = X$ schiefsymmetrischer Vektorfeldoperator und wegen $\mu(E_t^X)=0$ ist der Integrationsfluß des Vektorfeldes $A = X$ maßinvariant ([1] S.605)

$$\text{d.h.} \quad \| T^X(-t)u \| = \|u\| \,. \quad (*)$$

Die Voraussetzungen i) und ii) des Lemmas IV.1 sind erfüllt, denn z.B. für i) hat

$$T^X(-t)\,u = e^{(1-\lambda)t}u, \quad \text{d.h.} \quad \| T^X(-t)\,u \| = e^{(1-\lambda)t}\|u\|$$

wegen (*) $u \equiv 0$ zur Folge.
Voraussetzungen iii) und iv) sind wegen (*) erfüllt ($T^X(t)$ ist hier ($\lambda=0$) unitär).
Somit haben wir als Spezialfall unter einer zusätzlichen Voraussetzung das Lemma von Nelson [1] erhalten:

Falls $\mu(E_t^X)=\mu(E_{-t}^X)=0$ für ein $t>0$, dann ist der schiefsymmetrische Vektorfeldoperator X auf $C_o^\infty(M)$ in $L^2_\mu(M)$ w.sch.a.

b Für $\lambda \neq 0$ wird die Diskussion wesentlich komplizierter, da X nicht mehr schiefsymmetrisch ist.
Wir weisen zunächst für den Fall

$$X = x\,d/dx \,, \quad \lambda = 1/2 \,, \quad M = \mathbb{R} \,, \quad E = C_o^\infty(\mathbb{R})$$

($x\,d/dx + \tfrac{1}{2} I$ ist auf $C_o^\infty(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch)
nach, daß alle Voraussetzungen von Lemma IV.1 erfüllt sind:
Die Integralkurve von $x\,d/dx$ bei $x_o \in \mathbb{R}$ ist die Kurve $\gamma_{x_o}^{x\,d/dx}(t) = x_o\,e^t$, denn es gilt

$$\frac{d}{dt} f(x_o e^t)\Big|_{t=0} = \frac{d f(x_o e^t)}{d(x_o e^t)}\Big|_{t=0} \cdot \frac{d(x_o e^t)}{dt}\Big|_{t=0} = x_o f'(x_o) = \left(x\,\frac{d}{dx}\right)_{x_o} f(x) \,.$$

Um zu zeigen,daß Voraussetzung i) erfüllt ist,untersuchen wir,ob

$$T^{X}(-t)\,u = e^{(1-\lambda)t}\,u \quad \text{mit} \quad u \in L^2(\mathbb{R}),\ u \neq 0$$

gelten kann.Wir schreiben die Beziehung in der Form

$$u\left(x e^{-t}\right) = e^{(1-\lambda)t}\,u(x) .$$

Dann ist u ,falls $u \neq 0$,nicht in $L^2(\mathbb{R})$:
Sei $u \neq 0$,d.h. $u(a) = b$ für zwei von Null verschiedene Zahlen (a reell).Wir erhalten

$$u\left(a e^{-t}\right) = b\, e^{(1-\lambda)t} = b\, e^{t/2} .$$

Für die Norm von u ergibt sich

$$\|u\| \geq \int_0^{\infty} u(x)\,\overline{u(x)}\,dx = \int_0^{\infty} u(a e^{-t})\,\bar{u}(a e^{-t})\,d(a e^{-t}) = a b \bar{b} \int_{-\infty}^{+\infty} dt$$

Also ist $u \notin L^2(\mathbb{R})$,was $u \in \mathcal{D}_{(x\frac{d}{dx})^*}$ widerspricht.
Daher erhalten wir $u \equiv 0$.

Die Gültigkeit von Voraussetzung ii) wird ähnlich gezeigt:
Sei $u \neq 0$, $u(a) = b$, $a,b \neq 0$.
Dann ist $u\left(x e^{-t}\right) = e^{-(1+\lambda)t}\,u(x)$ (Voraussetzung ii))
d.h. $(\lambda = 1/2)$ $u\left(a e^{-t}\right) = b\, e^{-3t/2}$

und wir erhalten

$$\|u\| \geq \int_0^{\infty} u(a e^{-t})\,\bar{u}(a e^{-t})\,d(a e^{-t}) = a b \bar{b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4t}\,dt$$

und daher $u \in L^2(\mathbb{R})$ nur für $u \equiv 0$.

Voraussetzungen iii) und iv) sind offensichtlich erfüllt.
Somit ist $x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2} I$ auf $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ w.sch.a.

c Wir betrachten jetzt einen Operator des Typs

$$A = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{N} \alpha_{\mu\nu} \left(x_\mu \partial/\partial x_\nu + \partial/\partial x_\nu \, x_\mu \right) , \quad \alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}$$

auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$.

A ist schiefsymmetrisch auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ und kann in der Form

$$A = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu} \alpha_{\nu\nu} I = X + \lambda I$$

geschrieben werden, wobei X ein Vektorfeldoperator ist.

Behauptung

Für A auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ sind alle Voraussetzungen des verallgemeinerten Lemmas von Nelson erfüllt, d.h. A ist w.sch.a. auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Beweis:

Für X = 0 ist die wesentliche Schiefadjungiertheit von A sofort ersichtlich. Es sei daher im folgenden nur der Fall $X \neq 0$ betrachtet.

Um die Voraussetzungen von Lemma IV.1 für $A = X + \lambda I$ zu beweisen, müssen wir zunächst die Integralkurven von X ermitteln.

Die Kurve $\gamma^X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ ist Integralkurve des Vektorfeldes

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

somit ergibt sich für die Integralkurve

$$\gamma^X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

eines vorgegebenen Vektorfeldes

$$X = \sum_{j=1}^{n} \xi^j(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

das Differentialgleichungssystem

$$x_1'(t) = \xi^1(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = \xi^n(x_1, \ldots, x_n)$$

d.h. in unserem Fall erhalten wir für

$$X = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

die Beziehung

$$x_\nu'(t) = \sum_{\mu} \alpha_{\mu\nu} x_\mu .$$

Im ein-dimensionalen Fall $x'(t) = \alpha x(t)$ ergibt sich für das Vektorfeld $\alpha x \frac{d}{dx}$ die Integralkurve

$$x(t+a) = x(a)\, e^{\alpha t}$$ (vgl. Diskussion unter b).

Im n-dimensionalen Fall verwenden wir die Symmetrie von $\alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}$. Mit dem Ansatz $x_\nu(t) = x_\nu(0)\, e^{\alpha t}$ erhalten wir für $x_\nu'(t) = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\mu\nu} x_\mu(t)$ die Gleichung

$$x_\nu(0)\, \alpha\, e^{\alpha t} = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\mu\nu} x_\mu(0)\, e^{\alpha t}, \text{ d.h. } \sum_{\mu} \alpha_{\mu\nu} x_\mu(0) = \alpha\, x_\nu(0).$$

Es liegt also ein Eigenwertproblem vor.
Da $\alpha_{\mu\nu}$ nach Voraussetzung eine symmetrische Matrix ist, existieren n orthonormale Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten. Wenn wir die Basis des Koordinatensystems mit den orthonormalen Eigenvektoren in Übereinstimmung bringen, erhalten wir

$$x_\nu(t) = x_\nu(0)\, e^{\alpha_\nu t}, \text{ d.h. } g^X(t) = \left(x_1(0) e^{\alpha_1 t}, \dots, x_n(0) e^{\alpha_n t}\right).$$

Bei n-facher Entartung (z.B. $\alpha_{\mu\nu} = \alpha I$) ergeben sich als Integralkurven Geraden (z.B. bei $x\,\partial/\partial x + y\,\partial/\partial y$).

Wir zeigen nun, daß alle Voraussetzungen des Lemmas IV.1 erfüllt sind:

i) Da $X \neq 0$, gibt es ein $a_i \neq 0$; sei o.B.d.A. $a_1 \neq 0$.
Weiterhin sei $u(x_1, \dots, x_n) \not\equiv 0$ und es gelte
$T^X(-t)u = e^{(1-\lambda)t} u$.
Wegen $u \not\equiv 0$ gibt es eine Menge
$B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = a_1 \neq 0,\ a_i \leq x_i \leq b_i,\ a_i \neq b_i,\ i = 2, 3, \dots, n\}$
mit $u(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ für $(x_1, \dots, x_n) \in B$.
Wir definieren nun die Menge
$\tilde{B} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = a_1 e^{\alpha_1 t},\ x_i = \tilde{x}_i e^{\alpha_i t},\ a_i \leq \tilde{x}_i \leq b_i,\ -\omega < t < +\omega,\ i = 2, \dots, n\}$
Dann gilt

$$\|u\| = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \; |u(x_1, \dots, x_n)|^2$$

$$\geq \int_{\tilde{B}} d\vec{x} \; |u(x_1, \dots, x_n)|^2 = \text{(Variabl.subst.) *)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{a_2}^{b_2} d\tilde{x}_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} d\tilde{x}_n \; |u(a_1 e^{\alpha_1 t}, \tilde{x}_2 e^{\alpha_2 t}, \dots, \tilde{x}_n e^{\alpha_n t})|^2 \times$$

$$\times \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t} & \frac{\partial x_n}{\partial \tilde{x}_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \tilde{x}_n} \end{pmatrix} \right|$$

---

*) $(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (a_1 e^{\alpha_1 t}, \tilde{x}_2 e^{\alpha_2 t}, \dots, \tilde{x}_n e^{\alpha_n t})$

Für den Betrag der Jacobi-Determinante ergibt sich

$$\left| \det \begin{pmatrix} \alpha_1 a_1 e^{\alpha_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 \tilde{x}_2 e^{\alpha_2 t} & e^{\alpha_2 t} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_n \tilde{x}_n e^{\alpha_n t} & & & e^{\alpha_n t} \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \alpha_1 a_1 e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t} \right|$$

Wir erhalten also mit

$$u(a_1 e^{\alpha_1 t}, \tilde{x}_2 e^{\alpha_2 t}, \ldots, \tilde{x}_n e^{\alpha_n t}) = e^{-(1-\lambda)t} u(a_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$$

$$\|u\| \geq \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{a_2}^{b_2} d\tilde{x}_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} d\tilde{x}_n \; e^{-2(1-\lambda)t} \left| u(a_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \right|^2 \times$$

$$\times \left| \alpha_1 a_1 e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t} \right|$$

$$= |\alpha_1 a_1| \int_{a_2}^{b_2} d\tilde{x}_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} d\tilde{x}_n \left| u(a_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \right|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \; e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t}$$

wobei alle Faktoren nach Voraussetzung von Null verschieden sind und das Integral divergiert. Somit ist $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ nur für $u \equiv 0$.

ii) ergibt sich wie i)

iii) gilt wegen $T^X(t)\, C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

iv) $T^X(t)\, L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$:

Sei $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$; dann ist $T^X(t)u$ eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$, definiert durch

$$(T^X(t)u)(x_1,\dots,x_n) = u\left(\gamma^X_{x_1}(t),\dots,\gamma^X_{x_n}(t)\right) = u\left(x_1 e^{\alpha_1 t},\dots,x_n e^{\alpha_n t}\right)$$

Folglich ist

$$\|T^X(t)u\| = \int \left|\left(T^X(t)u\right)(x_1,\dots,x_n)\right|^2 dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int \left|u\left(x_1 e^{\alpha_1 t},\dots,x_n e^{\alpha_n t}\right)\right|^2 dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int \left|u\left(x_1 e^{\alpha_1 t},\dots,x_n e^{\alpha_n t}\right)\right|^2 \frac{d\left(x_1 e^{\alpha_1 t}\right)}{e^{\alpha_1 t}} \dots \frac{d\left(x_n e^{\alpha_n t}\right)}{e^{\alpha_n t}}$$

$$= e^{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t} \|u\| \quad < a$$

V INTEGRABLE UND NICHT-INTEGRABLE DARSTELLUNGEN VON LIE ALGEBREN

Im vorliegenden Kapitel werden integrable und nicht-integrable Liealgebradarstellungen untersucht.
Dabei stellt sich ein wichtiger Zusammenhang zwischen der Integrabilität einer Darstellung und der wesentlichen Selbst-Adjungiertheit des Nelsonoperators der Darstellung heraus (Lemmata V.2 und V.3) .
Die zur Konstruktion physikalischer Generatoren wichtigen Kriterien für die wesentliche Selbst-Adjungiertheit symmetrischer Operatoren sind daher auch hinsichtlich der Integrabilität einer Liealgebradarstellung von Bedeutung.
Der Aufbau des Kapitels gliedert sich folgendermaßen:
Mit Hilfe des Theorems von Stone (Abschnitt V.1) definieren wir in V.2 integrable,nicht-integrable, fast-integrable und spezielle,physikalisch motivierbare Klassen nicht-integrabler Darstellungen (echt fast-integrable und partiell integrable Darstellungen, s. Definitionen V.5 und V.6) . Dann werden einige Eigenschaften integrabler Liealgebradarstellungen angegeben (Lemma V.2) und anschließend diskutiert, inwiefern diese auch hinreichend für die Integrabilität einer Liealgebradarstellung sind (Lemma V.3).
Darüberhinaus geben wir unter Verwendung der Ergebnisse von Kapitel II ein Anwendungsbeispiel.
Abschließend wird in Abschnitt V.3 die physikalische Motivation echt fast-integrabler und partiell integrabler Liealgebradarstellungen erörtert.

V.1 Das Theorem von Stone

In diesem Abschnitt wird gezeigt,wie man aus einer unitären Darstellung einer Gruppe eine Darstellung der zugehörigen Lie Algebra konstruieren kann (Theorem von Stone) .

Zunächst benötigen wir einige Definitionen:

Definition V.1

Sei G eine Lie Gruppe , H ein Hilbert Raum und U eine unitäre Darstellung von G in H .
Dann heißt U stetig , wenn die Abbildung $\tilde{h}$

$$G \ni g \xrightarrow{\tilde{h}} U(g)h \in H$$

für jedes $h \in H$ eine stetige Abbildung von G in H ist.

Definition V.2

Sei wieder U eine unitäre Darstellung einer Lie Gruppe G in einem Hilbert Raum H .
Ein Element $h \in H$ heißt unendlich oft differenzierbarer Vektor für U , wenn die Abbildung

$$G \ni \sigma \xrightarrow{\tilde{h}} U(\sigma)h \in H \quad \text{für jedes } h \in H$$

von der Klasse C^∞ ist,d.h. alle gemischten partiellen Ableitungen der Abbildung $\tilde{h}$ existieren in der Topologie von H ,

z.B. $\frac{1}{\alpha}\left(\tilde{h}(x_1+\alpha, x_2, \dots, x_n) - \tilde{h}(x_1, \dots, x_n)\right)$

konvergiert in H für $\alpha \to 0$. ($\sigma = (x_1, \dots, x_n)$ (lok.Koord.))

Anmerkung

$\tilde{h}$ ist differenzierbar $\Rightarrow$ $\tilde{h}$ ist stetig

Zur Konstruktion von Liealgebradarstellungen per Differentation aus Darstellungen der zugehörigen Lie Gruppe benötigen wir das

Theorem von Stone

Sei U(G) eine stetige unitäre Darstellung einer einfach zusammenhängenden nichtkompakten Gruppe G in einem Hilbert Raum H . $U_i(\alpha)$ sei eine eindimensionale Untergruppe von U(G).
Für jedes $U_i(\alpha)$ sei $\mathfrak{D}_i \subset H$ eine Menge , für die $(\varphi \in \mathfrak{D}_i)$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \left(U_i(\alpha) - 1 \right) \varphi = \psi \in H \text{ existiert.}$$

Wir definieren den entsprechenden infinitesimalen Generator D_i auf $\mathfrak{D}_i$ durch $D_i \varphi = \psi$.
Dann ist $\mathfrak{D}_i$ dicht in H und D_i auf $\mathfrak{D}_i$ schief-adjungiert.

In diesem Zusammenhang erwähnen wir gleich

Lemma V.1

Sei X ein C^∞-Vektorfeld auf einer C^∞-Mannigfaltigkeit M.
Dann gilt für die Darstellung

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow T^X(t)$$

der additiven Gruppe der reellen Zahlen auf $C_0^\infty(M)$:

$$\left(\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(T^X(t) - 1 \right) f \right)(p) = X_p f$$

Beweis:

Ergibt sich durch einfache Rechnung.

V.2 Definition und Eigenschaften integrabler bzw. nicht-integrabler Darstellungen

Zunächst definieren wir integrable und nicht-integrable Darstellungen von Lie Algebren und geben einige physikalisch plausible Klassen nicht-integrabler Darstellungen an (z.B. echt fast-integrable Darstellungen, Definition V.5) .
Anschließend werden notwendige und hinreichende Kriterien für die Integrabilität von Liealgebradarstellungen betrachtet (Lemmata V.2 und V.3) .
Diese Kriterien sowie ein Ergebnis aus II.2 verwenden wir dann zur Konstruktion einer integrablen Liealgebradarstellung durch unbeschränkte w.sch.a. Operatoren.

Beispiele echt fast-integrabler Darstellungen werden in Kapitel VI gegeben.

Wie wir in Kapitel VI sehen,können nicht alle Liealgebradarstellungen $D(\mathcal{G})$ aus unitären Gruppendarstellungen hergeleitet werden.
Weiterhin existieren physikalisch interessante Klassen solcher "nicht-integrabler" Darstellungen,sogenannte "echt fast-integrable" Darstellungen,so daß folgende Definitionen sinnvoll sind:

Definition V.3

Eine c.i. Darstellung *) $D(\mathcal{G})$ einer Lie Algebra $\mathcal{G}$ heißt integrabel,wenn es eine stetige unitäre Darstellung $U(G)$ der $\mathcal{G}$ entsprechenden universellen Überlagerungsgruppe G gibt,derart,daß $D(\mathcal{G})$ durch Differentation (nach dem Theorem von Stone) und geeignete Wahl des Definitionsbereiches aus $U(G)$ erhalten werden kann.
Andernfalls heißt $D(\mathcal{G})$ nicht-integrabel.

---

*) Eine c.i. Darstellung $D(\mathcal{G})$ einer Lie Algebra $\mathcal{G}$ ist eine Darstellung von $\mathcal{G}$ durch lineare Operatoren auf einem gemeinsamen,dichten und invarianten Bereich in einem Hilbert Raum H .

Definition V.4

Eine c.i. Darstellung $D(\mathfrak{G})$ einer Lie Algebra $\mathfrak{G}$ heißt fast-integrabel, wenn jeder Operator aus $D(\mathfrak{G})$ w.sch.a. ist.

Definition V.5

Eine c.i. Darstellung $D(\mathfrak{G})$ einer Lie Algebra $\mathfrak{G}$ heißt echt fast-integrabel, wenn gilt:

i) $D(\mathfrak{G})$ ist fast-integrabel

ii) $D(\mathfrak{G})$ ist nicht-integrabel

Definition V.6

Eine c.i. Darstellung $D(\mathfrak{G})$ einer Lie Algebra $\mathfrak{G}$ heißt partiell integrabel bzgl. einer Unteralgebra $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$, wenn gilt:

i) $D(\mathfrak{G})$ ist echt fast-integrabel

ii) $D(\mathfrak{G}')$ ist integrabel

In Kapitel VI weisen wir die Existenz echt fast-integrabler und partiell integrabler Darstellungen nach, in Abschnitt V.3 diskutieren wir deren physikalische Relevanz.

Um Eigenschaften integrabler Darstellungen zu erkennen, geht man von einer stetigen unitären Darstellung U(G) einer einfach zusammenhängenden nichtkompakten Gruppe G aus und konstruiert mit Hilfe des Theorems von Stone eine Darstellung der zu G gehörigen Lie Algebra $\mathfrak{G}$ auf einem geeigneten Bereich. Auf diese Weise erhält man ([2]) eine (integrable) Darstellung der Lie Algebra $\mathfrak{G}$ durch wesentlich schief-adjungierte Operatoren auf einem gemeinsamen, dichten und invarianten Definitionsbereich, d.h. eine fast-integrable Darstellung der Lie Algebra $\mathfrak{G}$:

Lemma V.2

Sei U(G) eine stetige unitäre Darstellung einer einfach zusammenhängenden Gruppe G im Hilbertraum H.

Sei auf $E = \{ h \in H : h \text{ unendl.oft diff.Vektor für } U \} \subset H$ eine Darstellung $D^E(\mathfrak{G})$ der zu G gehörigen Lie Algebra $\mathfrak{G}$ durch ($X \in \mathfrak{G}$, $h \in E$)

$$D^E(X)\,h := \lim_{\alpha \to 0} \frac{U(\exp \alpha X)\,h - h}{\alpha} \qquad *)$$

gegeben **) .

Dann gilt

1 $D^E(\mathfrak{G})$ ist eine schiefsymmetrische c.i. Darstellung

2 Es gibt einen gemeinsamen dichten Bereich analytischer Vektoren für alle $D^E(X) \in D^E(\mathfrak{G})$, somit ist $D^E(\mathfrak{G})$ fast-integrabel.

3 Für jede Basis $\{X_1, \dots, X_n\}$ von $\mathfrak{G}$ ist $\Delta = \sum_{i=1}^{n} (D^E(X_i))^2$ auf E w.s.a.

4 Für jede Basis $\xi = \{X_1, \dots, X_n\}$ von $\mathfrak{G}$ ist $\mathcal{D}^{\infty}_{\xi}$ dicht in H .

Anmerkung

Wir nennen $\Delta = \sum_{i=1}^{n} (D^E(X_i))^2$ den Nelsonoperator der Liealgebradarstellung $D^E(\mathfrak{G})$ bzgl. der Basis $\{X_1, \dots, X_n\}$ ([2]) .

Beweis von Lemma V.2:

zu 1 : a E ist dicht in H ([1])
b E ist linear
c $D^E(\mathfrak{G})\,E \subset E$ ([1])
d $D^E(g)$ ist für $g \in \mathfrak{G}$ schiefsymmetrisch, da U unitär ist ([1]).

zu 2 : s. [1] Lemma 7.1; Lemma I.9

zu 3 : s. [1] Theorem 3

zu 4 : s. [1] Theorem 3 und Lemma 7.1

---

*) exp ist die exponentielle Abb.d. Alg.in die Gruppe

**) $D^E(\mathfrak{G})$ ist eine Einschränkung der nach dem Theorem v.Stone aus U(G) erhaltenen Darst.auf e. Unterber.

Das folgende Lemma zeigt, daß einige Eigenschaften von $D^E(\mathcal{G})$ bereits hinreichend für die Integrabilität einer schiefsymmetrischen c.i. Darstellung sind:

Lemma V.3

Sei $D(\mathcal{G})$ eine schiefsymmetrische c.i. Darstellung einer Lie Algebra $\mathcal{G}$ auf $\mathfrak{D}$ in H.
Dann gilt:

1 $\Delta = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ sei w.s.a. für eine Basis $\{X_1, \dots, X_n\}$ von $D(\mathcal{G})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{i) } D(\mathcal{G}) \text{ ist integrabel} \\ \text{ii) } \widetilde{D}(g) = \widetilde{D^E}(g) \quad \text{für alle } g \in \mathcal{G} \end{cases}$$

2 $\xi = \{X_1, \dots, X_n\}$ sei eine Basis von $D(\mathcal{G})$ und $\mathfrak{D}_\xi^\infty$ liege dicht in H

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{i) } D(\mathcal{G}) \text{ ist integrabel} \\ \text{ii) } X_1, \dots, X_n \text{ haben einen gemeinsamen dichten Bereich analytischer Vektoren, somit ist jedes } X_i \in \{X_1, \dots, X_n\} \text{ w.sch.a.} \\ \text{iii) } \widetilde{D}(g) = \widetilde{D^E}(g) \quad \text{für alle } g \in \mathcal{G}. \end{cases}$$

Beweis:

zu 1 : s. [1] Theorem 5
zu 2 : i) s. [1] Lemma 9.1
ii) s. Lemma I.9
iii) s. [1] Lemma 9.1.

Als Anwendung von Lemma V.3 - 1 und der Ergebnisse über quasidiagonale Operatoren (Kapitel II) erhalten wir

Lemma V.4

Sei $\{\varphi_\nu\}$ eine Basis in H und sei $\mathcal{G}$ eine Lie Algebra schiefsymmetrischer Operatoren auf $\mathfrak{D}_\mathcal{G} := L\,H\{\varphi_\nu\}$

mit $$G\varphi_\nu = \sum_\mu G_\nu^\mu \varphi_\mu \quad \text{für } G \in \mathcal{G},$$

wobei alle G_ν^μ quasidiagonal sind.
Dann ist jedes $G \in \mathcal{G}$ auf $\mathfrak{D}_\mathcal{G}$ w.sch.a. und $\mathcal{G}$ ist integrabel.
(Es liegt also eine integrable fast-integrable Darst. vor)

Beweis:

Nach Lemma II.10 ist jedes $G \in \mathfrak{G}$ w.sch.a.

Ebenso ist $\sum_{n=1}^{d} G_n^2$ für jede Basis $\{G_1, \ldots, G_d\}$ in $\mathfrak{G}$ w.s.a. (Lemmata II.10 und II.11) ,

d.h. nach Lemma V.3 - 1 ist $\mathfrak{G}$ integrabel.

Beispiel

Wir betrachten eine Lie Algebra mit Basiselementen $\{ Q , P , iI \}$,die folgendermaßen definiert sind :

$$Q = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(\delta_{\nu,\mu-1}\sqrt{\nu} + \delta_{\nu,\mu+1}\sqrt{\nu-1})$$

$$P = \tfrac{1}{2} i \sqrt{2}\,(-\delta_{\nu,\mu-1}\sqrt{\nu} + \delta_{\nu,\mu+1}\sqrt{\nu-1})$$

$$[Q, P] = i\,1$$

d.h.

$$Q = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ & & & \ddots & & \end{pmatrix}$$

$$P = \tfrac{1}{2} i \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \cdots \\ & & & \ddots & & \end{pmatrix}$$

Q , P und iI sind quasidiagonale schief-symmetrische Matrizen.Folglich sind alle Voraussetzungen von Lemma V.4 erfüllt,d.h. $\{ Q , P , iI \}$ ist eine Basis einer integrablen Darstellung durch w.sch.a. Operatoren.

Wir geben noch folgendes wichtige Kriterium an :

Lemma V.4 ([14])

Für zwei kommutierende Elemente X und Y einer integrablen c.i. Darstellung vertauschen die Exponentiationen ebenfalls :

$$[X, Y] = 0 \quad \Rightarrow \quad \exp(X)\exp(Y) = \exp(Y)\exp(X).$$

V.3 Physikalische Motivation bestimmter nicht-integrabler Darstellungsklassen

In diesem Abschnitt diskutieren wir die physikalische Relevanz spezieller nicht-integrabler Darstellungen von Lie Algebren.

a Von der gruppentheoretischen Beschreibung relativistischer und nicht-relativistischer wechselwirkender Systeme ist bekannt,daß die Generatoren der physikalischen Darstellung ihrer dynamischen Algebra w.sch.a. sind,d.h. die Generatoren sind quantenmechanische Observable.
Wenn die dynamische Algebra des freien Systems zu einer Algebra verallgemeinert wird,die - hoffentlich - mindestens teilweise die Wechselwirkung beschreibt, sind einige weitere Generatoren hinzuzufügen.
Unsere Annahme ist,daß diese Generatoren ebenfalls Observable sind,d.h. wir sind aus obigen physikalischen Gründen an c.i. Darstellungen mit w.sch.a. Operatoren, d.h. fast-integrablen Darstellungen interessiert.

b Die physikalischen Darstellungen der oben angegebenen Beispiele sind integrabel,d.h. die endlichen Transformationen erfüllen die korrekten Gruppenrelationen. Wir betrachten nun eine integrable physikalische Darstellung einer Lie Algebra,die durch weitere observable Generatoren erweitert wird.Soll die Exponentiation eine unitäre Darstellung der entsprechenden Lie Gruppe liefern,läge eine weitere einschränkende Annahme vor. Erfahrungen mit der Ableitung diskreter Massenspektren von dynamischen Lie Algebren,die nicht-triviale Einbettungen freier dynamischer und innerer Symmetrie Algebren sind,führen zu der Annahme,daß für wechselwirkende Systeme die Integrabilitätsannahme nicht sinnvoll ist ([5]).
Dies legt die Einführung echt fast-integrabler Darstellungen nahe.

Unsere Diskussion zeigt,daß dynamische Algebren für wechselwirkende Systeme physikalische Darstellungen durch w.sch.a. Operatoren haben sollten,aber sie sind möglicherweise nicht zu Darstellungen der entsprechenden Gruppe integrierbar.

VI KONSTRUKTION NICHT-INTEGRABLER DARSTELLUNGEN

Wir kommen nun, entsprechend den Ankündigungen im vorhergehenden Kapitel, zur Konstruktion nicht-integrabler Darstellungen.
Aus physikalischen Gründen interessieren hier nur echt fast-integrable und partiell integrable Darstellungen (vgl.V.3) . Dabei stützen wir uns im wesentlichen auf die diskutierten Vektorfeldmethoden (Kapitel IV) zur Konstruktion w.sch.a. Operatoren sowie auf ein Integrabilitätskriterium (Lemma V.4) .
Das Kapitel gliedert sich folgendermaßen:
In Abschnitt VI.1 wird eine echt fast-integrable Darstellung der zweidimensionalen abelschen Lie Algebra $\mathbb{A}_2$ konstruiert, in VI.2 geben wir eine echt fast-integrable Darstellung der Heisenberg Algebra $\mathbb{H}_1$ an.
Darüberhinaus wird die Existenz einer echt fast-integrablen Darstellung für jede Lie Algebra nachgewiesen (Abschnitt VI.3) .
Im letzten Abschnitt geben wir ein Verfahren zur Konstruktion partiell integrabler Darstellungen an.

VI.1 Eine echt fast-integrable Darstellung der zwei-dimensionalen abelschen Lie Algebra

In diesem Abschnitt wird eine echt fast-integrable Darstellung der zwei-dimensionalen abelschen Lie Algebra $\mathcal{A}_2$ konstruiert.

Dabei gehen wir ähnlich wie E.Nelson ([1]) folgendermaßen vor:

(a) Wahl einer geeigneten C^∞-Mannigfaltigkeit M.

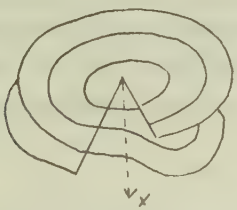
(b) Wahl zweier vertauschbarer C^∞-Vektorfelder X_1, X_2 auf M, für die $X = aX_1 + bX_2$, $a,b \in \mathbb{R}$, ein w.sch.a. Vektorfeldoperator auf einem Funktionenraum über M ist, der in $L^2(M)$ dicht ist. Die Vektorfeldoperatoren bilden eine Darstellung der zwei-dimensionalen abelschen Lie Algebra $\mathcal{A}_2$.

(c) Beweis der Nicht-Integrabilität mit Hilfe von Lemma V.4

Im einzelnen:

(a) Wahl der Mannigfaltigkeit M :

Wir wählen für M die Riemann'sche Mannigfaltigkeit M_R *) , d.h. die Riemann'sche Fläche ohne Verzweigungspunkt, auf der die komplexe Funktion $w = \sqrt{z}$ definiert ist. M_R ist lokal isomorph zum $\mathbb{R}^2$; jeder Punkt $p \in M_R$ hat eine natürliche kartesische 2-dimensionale Koordinatenumgebung.



*) In dem von Nelson angegebenen Beispiel ([1]) wird ebenfalls eine zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit gewählt, die aber im Gegensatz zu M_R geschlossen ist.

(b) Vektorfelder auf M_R:

Gegeben seien die Vektorfeldoperatoren $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ auf $C_c^\infty(M_R)$ in $L_2(M_R)$. Betrachte die Menge von Operatoren $X(a,b) = a\,\partial/\partial x + b\,\partial/\partial y$, $a,b \in \mathbb{R}$. $C_c^\infty(M_R)$ ist gemeinsamer dichter invarianter Bereich der $X(a,b)$. Da $[\partial/\partial x, \partial/\partial y] = 0$ auf $C_c^\infty(M_R)$, bilden die $X(a,b)$ eine Darstellung $D(\mathcal{A}_2)$ der zwei-dimensionalen abelschen Lie Algebra $\mathcal{A}_2$ auf $C_c^\infty(M_R)$ mit linear unabhängigen Erzeugenden $X(1,0)$ und $X(0,1)$.

Man sieht nun

i) $X(a,b)$ ist schiefsymmetrisch für alle $a,b \in \mathbb{R}$, da $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ schiefsymmetrisch sind (partielle Integration !)

ii) $X(a,b)$ ist weiterhin für alle $a,b \in \mathbb{R}$ w.sch.a. auf $C_c^\infty(M_R)$, denn alle Voraussetzungen des verallgemeinerten Lemmas von Nelson (Lemma IV.1 a) sind erfüllt.

Also ist $D(\mathcal{A}_2)$ eine fast-integrable Darstellung von $\mathcal{A}_2$.

(c) $D(\mathcal{A}_2)$ ist nicht-integrabel:

Für die vertauschbaren Vektorfeldoperatoren $X(0,1)$ und $X(1,0)$ gilt $[\omega_\rho X(1,0), \omega_\rho X(0,1)] \neq 0$.

Dies sehen wir durch Anwendung der Exponentiation (d.h. Translation, vgl. Lemma V.1) auf eine Funktion u , deren Träger z.B. auf dem oberen Blatt von M_R im Bereich $-1 \leq x \leq 0$, $-1 \leq y \leq 0$ liegt:
dann befindet sich der Träger von $\exp X(0,1)\ \exp X(1,0)\ u$ auf dem unteren Blatt im Bereich $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$; der Träger von $\exp X(1,0)\ \exp X(0,1)\ u$ dagegen liegt im gleichen Bereich auf dem oberen Blatt.

Folglich ist $D(\mathcal{A}_2)$ nach Lemma V.4 nicht-integrabel.

Wir fassen zusammen:

Lemma VI.1

Die Darstellung $D(\mathcal{A}_2)$ der zwei-dimensionalen abelschen Lie Algebra $\mathcal{A}_2$ auf $C_c^\infty(M_R) \subset L_2(M_R)$ durch die Vektorfeldoperatoren $a\,\partial/\partial x + b\,\partial/\partial y$, $a,b \in \mathbb{R}$

ist echt fast-integrabel.

VI.2 Echt fast-integrable Darstellungen der Heisenberg Algebra

Wir konstruieren nun eine echt fast-integrable Darstellung der Heisenbergalgebra .

Die Heisenberg Algebra $\mathbb{H}_1$ in einer Dimension ist eine drei-dimensionale Lie Algebra mit der Basis P , Q , C und den Vertauschungsrelationen

$$[P , Q] = C \quad , \quad [P , C] = [Q , C] = 0 \quad .$$

Zur Konstruktion einer echt fast-integrablen Darstellung verwenden wir wieder die in VI.1 benutzte Methode und stellen fest :

Die Vektorfeldoperatoren

$$P = \partial/\partial x \quad , \quad Q = x\,\partial/\partial y \quad , \quad C = \partial/\partial y$$

auf $C_o^\infty(M_R) \subset L_2(M_R)$ haben folgende Eigenschaften:

(a) Sie liefern eine c.i. Darstellung $D(\mathbb{H}_1)$ auf $C_o^\infty(M_R)$, da $\partial/\partial x$, $x\,\partial/\partial y$ und $\partial/\partial y$ die Vertauschungsrelationen von $\mathbb{H}_1$ auf $C_o^\infty(M_R)$ erfüllen und $C_o^\infty(M_R)$ invariant ist.

(b) $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ sind schiefsymmetrisch auf $C_o^\infty(M_R)$. $x\,\partial/\partial y$ ist ebenfalls schiefsymmetrisch auf diesem Bereich, da x symmetrisch ist und $[x, \partial/\partial y] = 0$ gilt. Die Operatoren sind sogar w.sch.a. auf $C_o^\infty(M)$, da die Voraussetzungen von Lemma IV.1 erfüllt sind (Anwendung a). Das gleiche gilt für Linearkombinationen.

(c) Ferner ist $D(\mathbb{H}_1)$ nach Lemma V.4 nicht-integrabel, da die Exponentiationen der kommutierenden Generatoren $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ nicht vertauschen.

Es ist also gezeigt:

Lemma VI.2

Die Darstellung der Heisenberg Algebra auf $C_o^\infty(M_R)$ $\subset L_2(M_R)$ durch die Vektorfeldoperatoren

$$P = \partial/\partial x\,, \quad Q = x\,\partial/\partial y \quad \text{und} \quad C = \partial/\partial y$$

ist echt fast-integrabel.

Anmerkung:

Die obige Darstellung ist reduzibel. Um eine irreduzible Darstellung oder eine quasiirreduzible zu erhalten, muß C durch ein Vielfaches des Einheitsoperators realisiert werden. Dies läßt sich etwa dadurch erreichen, daß man aus $L_2(M_R)$ einen kleineren Funktionenraum passend auswählt.

VI.3 Echt fast-integrable Darstellungen für jede Lie Algebra

Man Könnte vermuten,daß nur abelsche oder gewisse lösbare Lie Algebren echt fast-integrable Darstellungen besitzen.Dies ist nicht der Fall.Wir zeigen in diesem Abschnitt vielmehr,daß es zu jeder Lie Algebra echt fast-integrable Darstellungen gibt. Vorbereitend benötigen wir einige Lemmata.

1 Zunächst wird eine Verallgemeinerung von Lemma VI.1 angegeben.

Lemma VI.3

Zu der n-dimensionalen abelschen Lie Algebra $\mathcal{A}_n$ $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$ existiert eine echt fast-integrable Darstellung.

Beweis:

$\mathcal{A}_n$ sei dargestellt durch Vektorfeldoperatoren $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_{n-2}, \partial/\partial x, \partial/\partial y$ auf $C_0^\infty(\tilde{M}_n) \subset L_2(\tilde{M}_n)$ mit $\tilde{M}_n := \mathbb{R}^{n-2} \times M_R$.

Alle Operatoren sind w.sch.a. (Lemma IV.1-a) auf dem invarianten Bereich $C_0^\infty(\tilde{M}_n) \subset L_2(\tilde{M}_n)$.Die Darstellung ist nicht-integrabel,da die Exponentiationen der kommutierenden Vektorfeldoperatoren $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ nicht vertauschen.

2 Das folgende Lemma zeigt,daß jede Lie Algebra endlichdimensionale treue Darstellungen durch Matrizen,deren Diagonalelemente Null sind,besitzt.

Lemma VI.4

Sei $\mathcal{G}$ eine Lie Algebra.Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß $\mathcal{G}$ durch $n \times n$ - Matrizen $(\alpha_{\mu\nu})$ mit $\alpha_{\mu\mu} = 0$ dargestellt werden kann.

Beweis:

1) Jede Lie Algebra $\mathfrak{G}$ läßt sich für ein $n \in \mathbb{N}$ durch $n \times n$ - Matrizen darstellen (treue Darstellung; Theorem von Ado). Die Darstellung sei mit $\hat{\mathfrak{G}}$ bezeichnet.

2) Folglich ist $\hat{\mathfrak{G}}$ in $SL(n,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{1}_n$ *) enthalten, wobei $SL(n,\mathbb{R})$ die Eigendarstellung der abstrakten Lie Algebra $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ bedeutet und $\mathfrak{1}_n$ die durch die $n \times n$ - Einheitsmatrix erzeugte 1-dimensionale Lie Algebra ist.

3) Es gilt $SL(n,\mathbb{R}) \subset SO(p,q)$ für geeignete $p,q \in \mathbb{N}$: $p + q = n$, $|p - q| = 0$ oder 1 .
Dabei ist $SO(p,q)$ wieder die Eigendarstellung von $\mathfrak{so}(p,q)$,die durch Matrizen $(a_{\mu\nu})$ mit $a_{\mu\mu} = 0$ geliefert wird.
Weiterhin sei die 1-dimensionale Lie Algebra $\mathfrak{1}_n$ durch 2×2 - Matrizen
$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dargestellt.

4) Folglich läßt sich $SL(n,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{1}_n$ durch $(n+2) \times (n+2)$ - Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad ,$$

(A: $n \times n$, 0: $n \times 2$, 0: $2 \times n$, 0: 2×2; 0: $n \times n$, 0: $n \times 2$, 0: $2 \times n$, B: 2×2)

$A \in SO(p,q)$, $B \in \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$,darstellen.
Da aber $\hat{\mathfrak{G}}$ in $SL(n,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{1}_n$ enthalten ist,läßt sich für $\mathfrak{G}$ immer eine $(n+2)$-dimensionale Darstellung durch Matrizen $(\alpha_{\mu\nu})$ mit $\alpha_{\mu\mu} = 0$ finden.

---

*) Sind $\mathbb{L}$, $\mathbb{K}$ Lie Algebren über dem gleichen Zahlenkörper,so ist mit $\mathbb{L} \oplus \mathbb{K}$ die direkte Liealgebrasumme von $\mathbb{L}$, $\mathbb{K}$ gemeint.

3 Lemma VI.4 impliziert das folgende wichtige

Lemma VI.5

a) Jede Lie Algebra $\mathfrak{G}$ läßt sich für geeignete $n \in \mathbb{N}$ durch Differentiations- und Multiplikationsoperatoren der Form

$$A = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} x_\nu \partial/\partial x_\mu \quad , \alpha_{\mu\nu} \in \mathbb{R} \quad , \alpha_{\mu\mu} = 0$$

auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ darstellen.

b) Sei $g_1 \dots g_r$ Basis von $\mathfrak{G}$ und sei $D_s(g_i)$ der Darsteller von g_i in einer treuen s-dimensionalen Darstellung von $\mathfrak{G}$. Dann ist der Darsteller $D(g_i)$ von g_i auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch

$$D(g_i) = \sum_{\mu,\nu=1}^{s} -(D_s(g_i))_{\mu\nu} x_\nu \partial/\partial x_\mu$$

gegeben.

Beweis:

Es genügt Teil b) zu zeigen. Dieser folgt aus [4], Lemma 2.

4 Nach diesen Vorbereitungen 1 - 3 kommen wir nun zu dem angekündigten

Lemma VI.6

Zu jeder Lie Algebra $\mathfrak{G}$ existiert eine echt fast-integrable Darstellung.

Beweis:

Wir bezeichnen die in Lemma VI.5 gegebene Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch Differentiations- und Multiplikationsoperatoren der Form

$$A = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} x_\nu \partial/\partial x_\mu \quad , \alpha_{\mu\nu} \in \mathbb{R} \quad , \alpha_{\mu\mu} = 0$$

auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $D(\mathfrak{G})$.
$D(\mathfrak{G})$ ist nach Lemma IV.1-a fast-integrabel. Um die etwas umständliche Untersuchung zu vermeiden, ob $D(\mathfrak{G})$ auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ integrabel ist oder nicht, bemerken wir, daß, falls $D(\mathfrak{G})$ nicht-integrabel ist, das obere Lemma gilt. Ist dagegen $D(\mathfrak{G})$ auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ integrabel, konstruieren wir durch Abänderung der Mannigfaltigkeit eine nicht-integrable Darstellung:

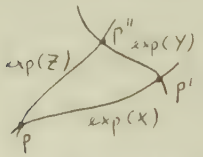
Wir unterscheiden zwei Fälle:

a Für alle $A \in D(\mathfrak{G})$ liegen nur Differentiationsoperatoren in eine Richtung ℓ_{μ_0} vor (μ_0 fest, beliebig), d.h.

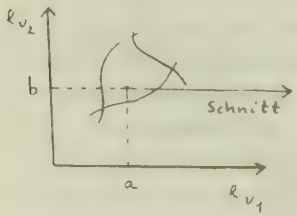
$$A = \sum_{\nu(\neq\mu_0)} \lambda_{\mu_0\nu} x_\nu \partial/\partial x_{\mu_0} \qquad \text{für alle } A \in D(\mathfrak{G}).$$

Dann ist $\mathfrak{G}$ eine abelsche Lie Algebra und wir können nach Lemma VI.3 eine echt fast-integrable Darstellung $\tilde{D}(\mathfrak{G})$ konstruieren.

b Wir setzen voraus, daß Differentiationsoperatoren in mindestens zwei Richtungen auftreten.
Wegen $\dim \mathfrak{G} > 1$ existieren zwei linear unabhängige Generatoren X, $Y \in D(\mathfrak{G})$. Dann laufen die Integralkurven von X und Y, die von einem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ ausgehen, auseinander.
Seien X, Y linear unabhängig und sei Z so gewählt, daß $\exp(Y)\exp(X) = \exp(Z)$ gilt. Dann kann die Integralkurve von Z nicht erst längs der Integralkurve von X bis p' (s.Abb.) und danach von p' längs der Integralkurve von Y bis p'' verlaufen, d.h. wir erhalten einen geschlossenen Weg $\mathcal{Z}^n_{XY}$ im $\mathbb{R}^n$.



Wir wählen im $\mathbb{R}^n = LH\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ eine durch $\vec{e}_{\nu_1}, \vec{e}_{\nu_2}$, $\nu_1 \neq \nu_2$ gekennzeichnete Ebene $E_{\nu_1\nu_2}$ derart aus, daß die Projektion von $\mathcal{Z}^n_{XY}$ auf $E_{\nu_1\nu_2}$ eine geschlossene Kurve $\mathcal{Z}^2_{XY}$ in $E_{\nu_1\nu_2}$ ergibt, die eine von Null verschiedene Fläche umfaßt. Dies ist stets möglich. (a,b) sei innerer Punkt dieser Fläche.



Nun konstruieren wir aus $D(\mathcal{G}_1)$ eine Darstellung $\widetilde{D}(\mathcal{G}_1)$ von $\mathcal{G}_1$, indem wir $\mathbb{R}^n = LH\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ durch die Mannigfaltigkeit

$$\widetilde{M}_n = LH\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{\nu_1-1}, \vec{e}_{\nu_1+1}, \dots, \vec{e}_{\nu_2-1}, \vec{e}_{\nu_2+1}, \dots \vec{e}_n\} \times M_R^{(a,b)} \quad *)$$

ersetzen und die oben genannten Operatoren A auf $C_c^\infty(\widetilde{M}_n)$ in $L_2(\widetilde{M}_n)$ betrachten.
Eine analoge Diskussion wie in Abschnitt VI.1 (c) zeigt, daß die Gruppenrelation

$$\exp(Y)\exp(X) = \exp(Z)$$

auf $C_0^\infty(\widetilde{M}_n)$ verletzt wird. $\widetilde{D}(\mathcal{G}_1)$ ist damit nicht-integrabel.

Somit existiert sowohl im Fall a als auch im Fall b stets eine echt fast-integrable Darstellung.

---

*) $M_R^{(a,b)}$ ist die Mannigfaltigkeit, die wir aus $LH\{\vec{e}_{\nu_1}, \vec{e}_{\nu_2}\}$ durch Schnitt bei (a,b) in Richtung $\vec{e}_{\nu_1}$ erhalten (in analoger Weise wie bei $M_R = M_R^{(0,0)}$).

VI.4 Konstruktion partiell integrabler Liealgebradarstellungen

Die zum Beweis von Lemma VI.3 konstruierte echt fast-integrable Darstellung von $\mathcal{A}_n$ ist bereits partiell integrabel (bzgl. der Unteralgebra $\mathcal{A}_{n-2}$) .
Wir wollen hier ein weiteres Verfahren und seine Anwendung auf nicht-abelsche Lie Algebren diskutieren:

Sei $\mathcal{G} := \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{L}$ die semidirekte Summe einer abelschen Lie Algebra $\mathcal{A}_n$ mit Basis $\{a_1,\dots,a_n\}$ und einer Lie Algebra $\mathcal{L}$ mit Basis $\{l_1,\dots,l_d\}$.
Sei $D(\mathcal{G})$ eine integrable Darstellung von $\mathcal{G}$ durch schiefsymmetrische Vektorfeldoperatoren auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$.
Weiterhin sei durch die Vektorfelder $P = \partial/\partial x$, $Q = x\,\partial/\partial y$, $C = \partial/$ auf M_R eine echt fast-integrable Darstellung $D(\mathcal{H}_1)$ der Heisenberg Algebra $\mathcal{H}_1$ auf $C_0^\infty(M_R) \subset L_2(M_R)$ gegeben (vgl. Lemma VI.2).
Wir konstruieren nun auf

$$\mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times M_R)$$

eine partiell integrable Darstellung:

1. Die Operatoren $A \in D(\mathcal{G})$ und $X \in D(\mathcal{H}_1)$ können auch als Operatoren auf $\mathcal{D}$ (mit den gleichen Vertauschungsrelationen) aufgefaßt werden.
2. Weiterhin seien auf $\mathcal{D}$ folgende Operatoren definiert:
   $D(a_i') := P + D(a_i)$, $i = 1,\dots,n$.
   Die Vertauschungsrelationen dieser Operatoren können aus denen von $D(\mathcal{G})$ und $D(\mathcal{H}_1)$ berechnet werden ($[P, D(a_i)] = 0$) . Wir sehen, daß die $D(a_i')$ eine Darstellung von $\mathcal{A}_n$ auf $\mathcal{D}$ liefern, die wir $D'(\mathcal{A}_n)$ nennen.
3. Die durch die Operatoren $D(C)$ bzw. $D(Q)$ erzeugten Liealgebradarstellungen auf $\mathcal{D}$ seien mit $D(\mathcal{C})$ bzw. $D(\mathcal{Q})$ bezeichnet, weiterhin liefert $D(\mathcal{G})$ noch Darstellungen $D(\mathcal{A}_n)$ und $D(\mathcal{L})$ seiner Unteralgebren.

Aus den Vertauschungsrelationen der Operatoren von $D(\mathcal{C})$, $D(\mathcal{A}_n)$, $D'(\mathcal{A}_n)$, $D(\mathcal{L})$ und $D(\mathcal{Q})$ ergibt sich, daß sie zu einer Lie Algebra $\hat{\mathcal{L}}$ schließen und daher eine Darstellung $\hat{D}(\hat{\mathcal{L}})$ von $\hat{\mathcal{L}}$ auf $\mathcal{D}$ liefern:

$$\hat{D}(\hat{\mathbb{L}}) := \left(D(\mathbb{C}) \oplus D(\mathbb{A}_n) \oplus D'(\mathbb{A}_n) \right) \in \left(D(\mathbb{L}) \oplus D(\mathbb{Q}) \right)$$

Wir zeigen nun, daß $\hat{D}(\hat{\mathbb{L}})$ eine partiell integrable Liealgebradarstellung ist:

1 $\mathcal{D} \subset L_2(\mathbb{R}_n \times M_R)$ ist gemeinsamer dichter invarianter Bereich für alle $X \in \hat{D}(\hat{\mathbb{L}})$.

2 Alle Operatoren aus $\hat{D}(\hat{\mathbb{L}})$ sind auf $\mathcal{D}$ w.sch.a. (Lemma IV.1-a), da schiefsymmetrische Vektorfelder vorliegen.

Somit ist $\hat{D}(\hat{\mathbb{L}})$ fast-integrabel.

Die Nicht-Integrabilität von $\hat{D}(\hat{\mathbb{L}})$ ergibt sich aus der Tatsache, daß $\partial/\partial y \in D(\mathbb{C})$ und $\partial/\partial x + D(q_i) \in D'(\mathbb{A}_n)$ kommutieren, ihre Exponentiationen dagegen nicht, was in Abschnitt VI.1 gezeigt wurde. Also ist $\hat{D}(\hat{\mathbb{L}})$ echt fast-integrabel.

$\hat{D}(\hat{\mathbb{L}})$ ist integrabel bzgl. der Unteralgebra

$$D(\mathbb{A}_n) \in D(\mathbb{L}) = D(\mathbb{A}_n \in \mathbb{L}) = D(q_1) .$$

Somit ist $\hat{D}(\hat{\mathbb{L}})$ eine partiell integrable Darstellung von $\hat{\mathbb{L}}$ auf $\mathcal{D}$.

Literaturverzeichnis

[1] E.Nelson — Analytic vectors
Ann.of Math.70(1959)S.572-615

[2] H.D.Doebner
O.Melsheimer — On Representations of Lie Algebras with Unbounded Generators
Nuovo Cimento 49,73 (1967)

On the Physical Relevance of Domains for Representations of Lie-Algebras
Istanbul Lectures 1966

[3] B.Pirrung — On Non-Continuous Representations of Lie Groups
Boulder Lectures 1970

[4] H.D.Doebner
T.Palev — Acta Physica Austriaca,
Suppl.VII,597-609 (1970)

[5] O'Raifeartaigh — Phys.Rev.Letters 14,575(1965)
Phys.Rev.Letters 164,2000(1967)

M.Flato
D.Sternheimer — Commun.math.Phys.12,296-303(1969)

[6] S.Coleman
J.Mandula — Phys.Rev.159,1251(1967)

[7] M.A.Neumark — Normierte Algebren
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,Berlin 1959

[8] G.Hellwig — Differentialoperatoren der mathematischen Physik
Springer Verlag,Berlin(1964)

[9] G.Köthe — Topologische linearer Räume I
Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1966

[10] H.H.Schaefer — Topological Vector Spaces
Macmillan Series (1967)

[11] S.Kobayashi
K.Nomizu — Foundations of Differential Geometry I
Interscience Publishers 1963

[12] K.Maurin — General Eigenfunction Expansions
Polska Akademia Nauk,Warschau 1968

[13] R.Abraham — Foundations of Mechanics
W.A.Benjamin,Inc. 1967

[14] P.M.Cohn — Lie Groups
Cambridge University Press,1961

Herrn Prof. Dr. H. D. Doebner
gilt mein aufrichtiger Dank für
anregende Diskussionen sowie für sein
stetes Interesse am Fortgang dieser Arbeit.

Name	Jörg-Erich Werth
Geburtstag	7.9.1945
Geburtsort	Timmendorfer Strand
Eltern	Wolfgang Werth (Abteilungspräsident) und Ehefrau Ruth Werth , geb. Beythien
Volksschule	1952 - 1954 in Häven (Kreis Ost-Holstein)
Grundschule	1954 - 1958 in Berlin
Höhere Schule	1958 - 1965 in Berlin (Malwida-von-Meysenbug-Schule)
Abitur	2.3.1965
Studium	Physik SS 1965 - WS 1967/68 an der Freien Universität Berlin SS 1968 - WS 1969/70 an der Philipps-Universität Marburg
Vordiplom	23.5.1967
Diplom	13.2.1970